



Courbes et Surfaces Paramétrées

Examen 2^{ème} session : Mercredi 17 juin
Durée : 2 heures + 30 min pour transmettre votre copie

- L'usage de la calculatrice, de tout logiciel et les communications extérieures sont interdites.
- Les notes de cours et de TD sont autorisées.
- La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
- Les réponses doivent être justifiées.
- L'épreuve commence à **14h**, vos copies doivent me parvenir **avant 16h30**.
- Je vous demande de faire l'épreuve en 2 heures puis de prendre le temps de scanner ou prendre en photos votre copie, de l'ordonner dans un pdf puis de compresser ce pdf via par exemple un site web comme <https://www.ilovepdf.com/fr>.

Questions de Cours

3pts

On considère la courbe \mathcal{C} définie de façon implicite par :

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 + y = x^2 + x\}$$

1. Montrer que \mathcal{C} est une courbe lisse. 1pts
2. Déterminer les points de \mathcal{C} qui possède une tangente horizontale. 1pts
3. Déterminer les points de \mathcal{C} qui possède une tangente verticale. 1pts

Exercice 1

11pts

On considère la courbe \mathcal{C} donnée en coordonnées polaires par $\rho = \frac{\cos(2\theta)}{1 - \cos(\theta)}$.

1. Donner le domaine de définition, les symétries de la courbe et un intervalle d'étude I . 1pts
2. Pour quelles valeurs de $\theta \in I$ a-t-on $\rho(\theta) = 0$? 1pts
3. Montrer que :

$$\rho'(\theta) = \frac{\sin(\theta) \left(2 \cos^2(\theta) - 4 \cos(\theta) + 1 \right)}{\left(1 - \cos(\theta) \right)^2}.$$

4. En déduire le signe ρ' sur I . *Indication : la valeur $\theta_0 = \arccos(1 - \sqrt{2}/2)$ doit apparaître.* 1.5pts
5. Montrer que : 1pt

$$\rho(\theta_0) = 2 \left(\sqrt{2} - 2 \right) < 0.$$
6. On admet que $\theta_0 \simeq 0.405\pi$. Dresser le tableau de variations et d'annulation de ρ . 1pts
7. Étudier les branches infinies de \mathcal{C} , s'il y en a. 2pts
8. Tracer la courbe \mathcal{C} en plaçant et justifiant soigneusement les points et tangentes remarquables. Faire le tracé sur I d'une couleur et compléter d'une autre couleur. 2pts

Exercice 2

6pts

On considère la courbe \mathcal{C} donnée en coordonnées polaires par $\rho = e^{\sqrt{\theta}}$, pour $\theta \geq 0$.

1. Étudier et tracer la courbe \mathcal{C} .

2pts

La courbe \mathcal{C} est donnée en coordonnées complexes par la paramétrisation :

$$f : \theta \mapsto e^{\sqrt{\theta}} e^{i\theta}.$$

2. Calculer la norme de $f'(\theta)$.

1pt

3. Calculer le relevé $\beta : \theta \mapsto \beta(\theta)$ de l'angle $(Ox, f'(\theta))$.

1.5pts

4. En déduire la courbure de la courbe \mathcal{C} au point de paramètre θ .

1.5pts