13 Deux théorèmes que l'on n'aura pas vu

Le dernier paragraphe du chapitre donne sans démonstration deux théorèmes importants sur les courbes continues dans le plan.

Le premier est le théorème de Jordan : "*toute courbe fermée simple plongée dans le plan possède un intérieur et un extérieur*". Ce théorème qui semble très naturel est très difficile à démontrer proprement.

Le second est un théorème de Peano : "Il existe un courbe continue qui remplit le carré". Ce résultat est très surprenant. Il signifie que l'on peut remplir complètement de façon continue un objet de dimension 2, le carré, à l'aide d'un objet qui devrait être de dimension 1 : une courbe.

13.A. Le théorème de Jordan

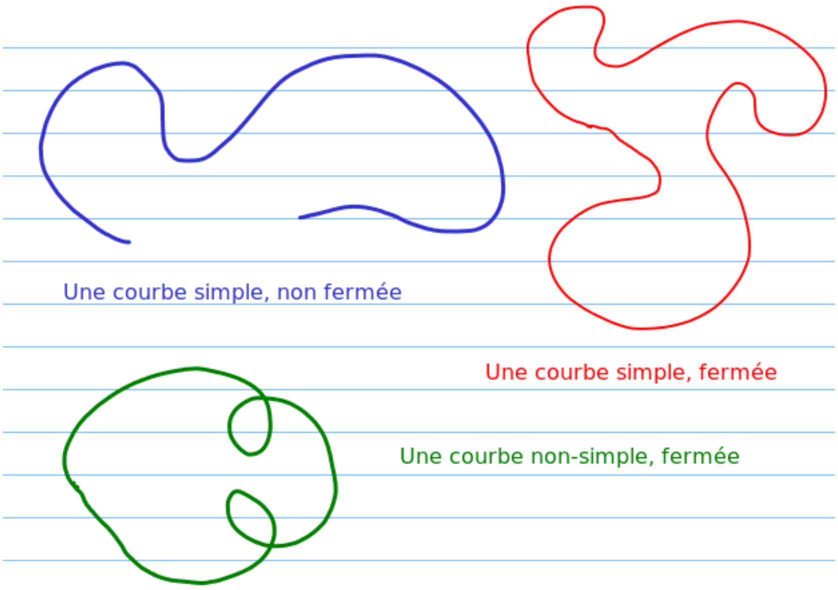

FIGURE 3.13 – Une courbe simple, non-fermée, une courbe non-simple, fermée et enfin une courbe simple fermée

Théorème 13.1 Soit $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple continue alors $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathrm{Im}(\gamma)$ possède deux composantes connexes, une bornée appelée *intérieur* de γ, et une non bornée appelée *extérieur* de γ.

Quiz avant de tourner la page!!! :
Lequel de ses 4 points est à l'intérieur de la courbe "compliquée"?

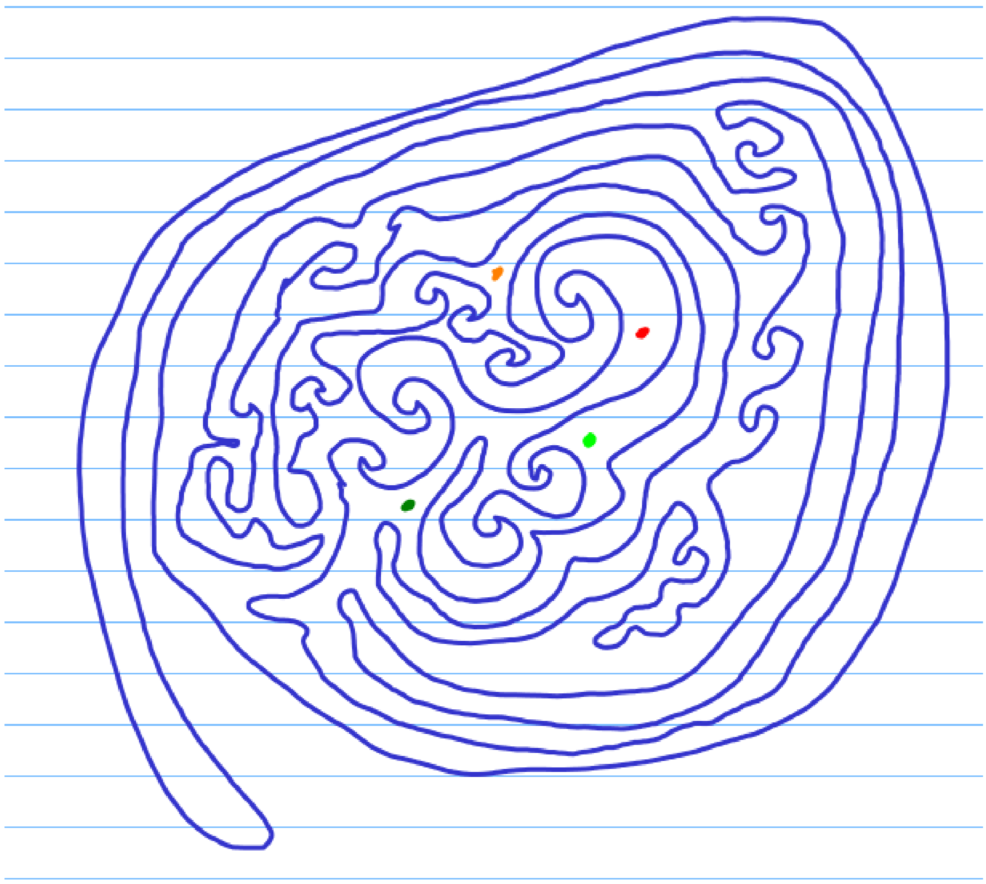

FIGURE 3.14 – Une courbe fermée simple "compliquée"

Indication, la figure suivante :

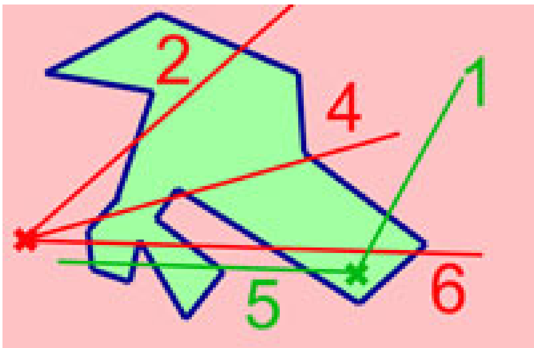

FIGURE 3.15 – Intérieur ou extérieur

Une vidéo Youtube à regarder pour en savoir plus [5].

— Voir la page Wikipedia et la chaine YouTube : El Jj.
— Vidéo : Deux (deux?) minutes pour... le théorème de Jordan.
— Durée 13 min.

5. Je fais la pub de cette vidéo tous les ans même les années sans Covid 19...

Réponse :

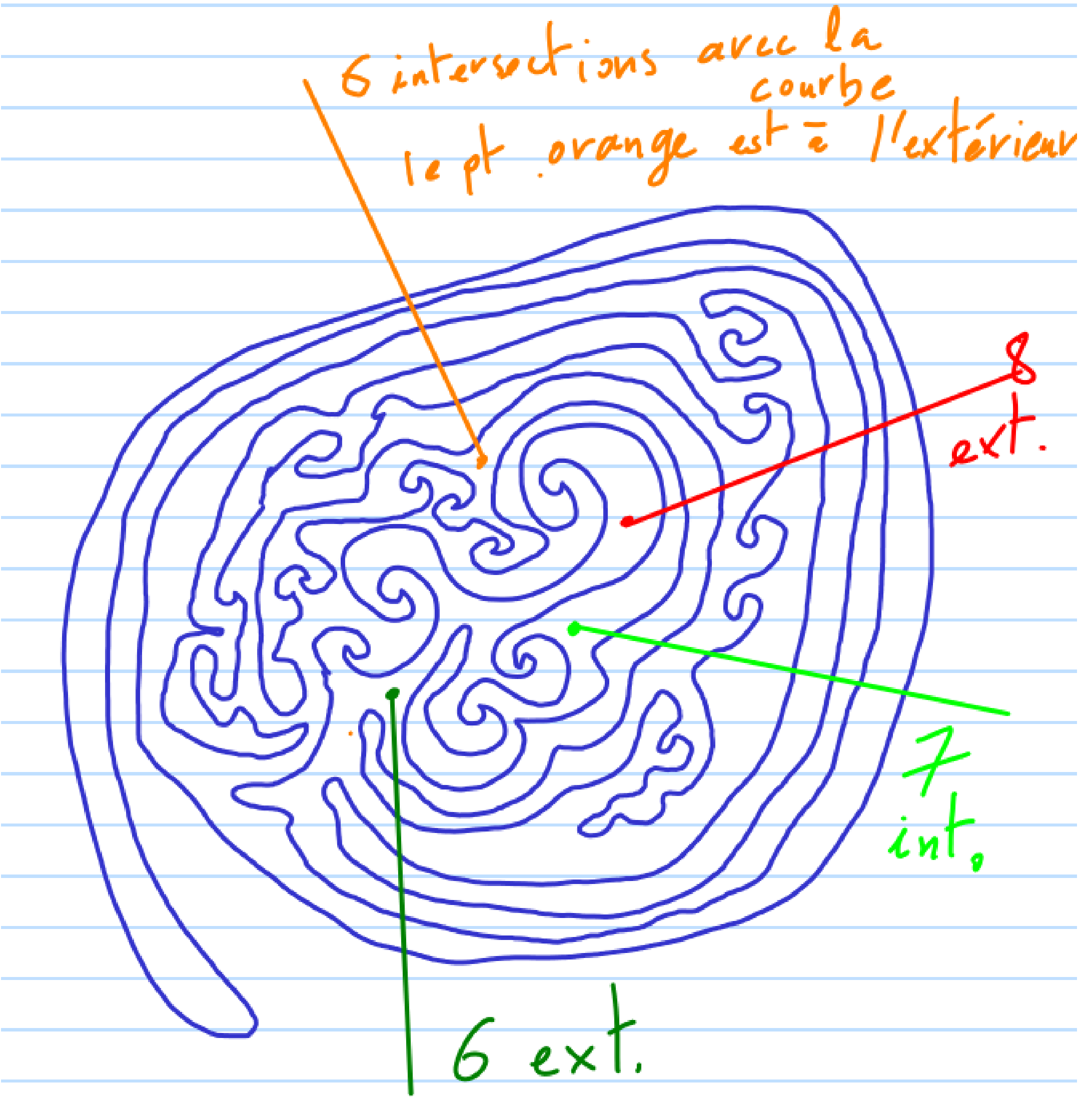

FIGURE 3.16 – Une courbe fermée simple "compliquée"

Un énoncé presque rigoureux :

> **Théorème 13.2** Soit $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple continue. Un point $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma(\mathbb{S}^1)$ est à l'intérieur (resp. à l'extérieur) si et seulement si une demi-droite issue de ce point rencontre la courbe γ en un nombre impairs (resp. pairs) de points si et seulement si toute demi-droite issue de ce point rencontre la courbe γ en un nombre impairs (resp. pairs) de points

13.B. L'exemple de Peano

Théorème 13.3 Il existe une courbe $f:[0,1]\to[0,1]^2$ continue et surjective.

Une telle courbe est toujours construite comme limite d'une suite de courbes. Ci-dessous vous trouverez des exemples de constructions :

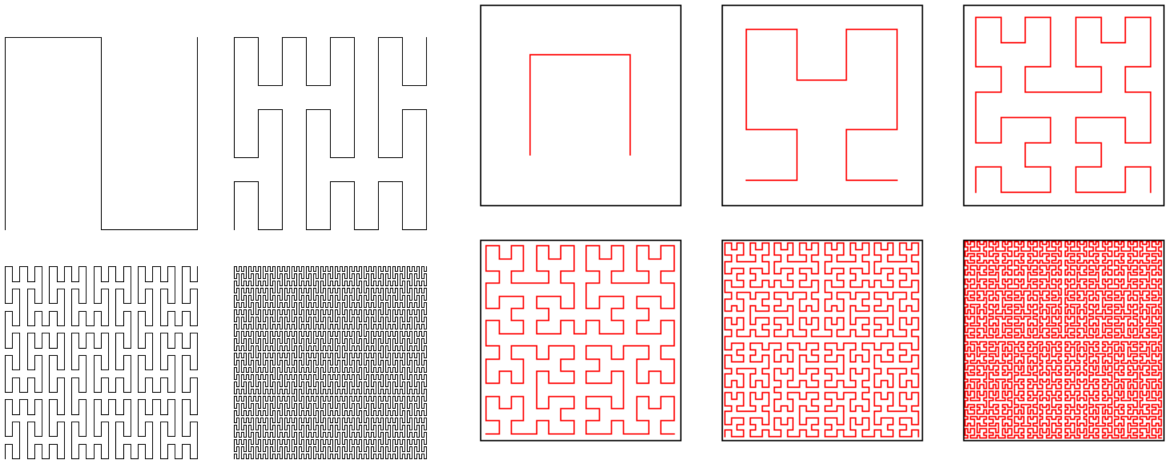

FIGURE 3.17 – Courbe originale de Peano et Courbe de Hilbert (plus simple que la version de Peano)

— Voir la page Wikipedia et la chaine YouTube : Science4All.
— Vidéo : Ces courbes qui colorient tout l'espace | Infini 10.
— Durée 16 min.