12 Enveloppe de droites

12.A. C'est quoi ?

Définition 12.1 Soit $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ une famille (paramétrée) de droites affines du plan $\mathbb{R}^2$, on dit qu'une courbe paramétrée $\mathcal{C}^1$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est *enveloppe de cette famille* lorsque :

$$\forall t \in I, \quad \gamma(t) \in \mathcal{D}_t \quad \text{et} \quad \gamma'(t) \in \overrightarrow{\mathcal{D}_t}$$

En français, l'enveloppe de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ est la courbe dont les tangentes sont les droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$. Plus précisément, la tangente au point de paramètre t est la droite D_t.

12.B. Reformulation et solution dans les coordonnées cartésiennes

On suppose que la famille $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ est donnée par des équations :

$$\mathcal{D}_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a(t)x + b(t)y + c(t) = 0\}$$

où a, b, c sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ telles que la fonction $a^2 + b^2$ ne s'annulent jamais. Dans ce cadre, une enveloppe à la famille $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ est une courbe $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ solution du système d'équations suivants :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) & = & 0 \\ a(t)x'(t) + b(t)y'(t) & = & 0 \end{array}\right. \qquad (\star)$$

En dérivant la première équation, on obtient :

$$a(t)x'(t) + b(t)y'(t) + a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0$$

et en utilisant la seconde, on arrive au système **équivalent** suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) & = & 0 \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) & = & 0 \end{array}\right. \qquad (\bigstar)$$

On a affaire à un système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a(t)x(t) + b(t)y(t) & = & -c(t) \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) & = & -c'(t) \end{array}\right. \qquad (\bigstar)$$

Proposition 12.1 Si les fonctions a, b, c sont de classe $\mathcal{C}^2$ et si la fonction $ab' - a'b$ ne s'annulent pas alors le système $(\bigstar)$ possède une unique solution (qui est de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$x = \frac{c'b - cb'}{ab' - a'b} \qquad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$$

En particulier, la courbe $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ est une enveloppe de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$.

■ **Exemple 3.1** On cherche l'enveloppe des droites :

$$D_\theta = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y - 1 = 0$$

On a donc :

$$a = \cos(\theta) \qquad b = \sin(\theta) \qquad c = 1$$

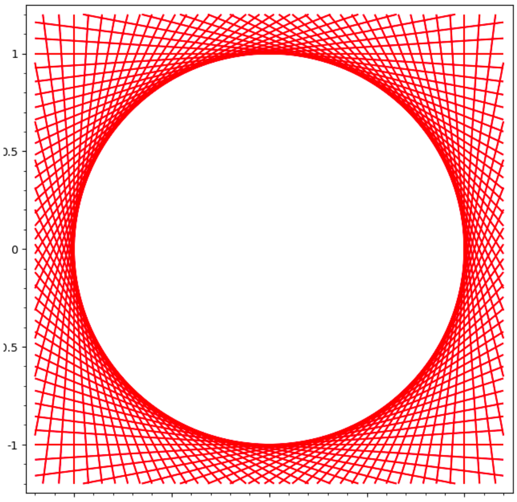

FIGURE 3.7 – L'enveloppe de la famille $D_\theta = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y - 1 = 0$ est le cercle unité.

Ce qui donne :

$$x = \frac{0 + 1 \times \cos(\theta}{\cos(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\sin(\theta)} = -\cos(\theta) \qquad y = \sin(\theta)$$

L'enveloppe de ses droites est donc le cercle. ■

■ **Exemple 3.2** On cherche l'enveloppe des droites :

$$D_\theta = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y - \sin(\theta)\cos(\theta) = 0$$

Avant de vous lancer dans la lecture et le calcul sur votre propre feuille de brouillon. Prenez le temps de comprendre que $(D_\theta)_\theta$ est la famille de droite obtenue en faisant glisser un segment de longueur 1, attaché à l'axe $(0x)$ à une extrémité B et à l'axe (Oy) à l'autre extrémité B. Au départ, l'extrémité A est en l'origine et l'extrémité (B) est en $(1,0)$. Ensuite, on soulève l'extrémité A pour la placer en $(0, \sin\theta)$, mécaniquement, l'extrémité B se déplace en $(\cos\theta, 0)$.

On a donc :

$$a = \sin(\theta) \qquad b = \cos(\theta) \qquad c = -\sin(\theta)\cos(\theta) = -1/2\sin(2\theta)$$

$$a' = \cos(\theta) \qquad b' = -\sin(\theta) \qquad c' = -\cos(2\theta) = \sin^2\theta - \cos^2\theta$$

On fait le calcul en fractionant le travail :

$$ab' - a'b = -\sin^2\theta - \cos^2\theta = -1 \qquad c'b - cb' = (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\cos\theta - \sin^2\theta\cos\theta = -\cos^3\theta$$

Ce qui donne :

$$x = \cos^3\theta \qquad y = \sin^3\theta$$

L'enveloppe de ses droites est un astroïde. ■

12.C. La développée d'une courbe

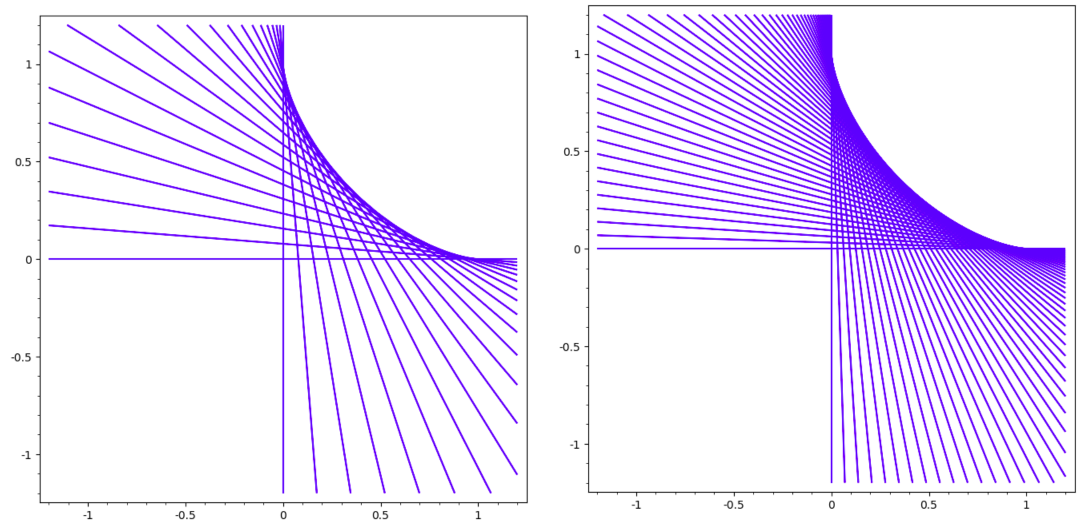

FIGURE 3.8 – L'enveloppe de la famille $D_\theta = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y - \sin(\theta)\cos(\theta) = 0$ est un astroïde.

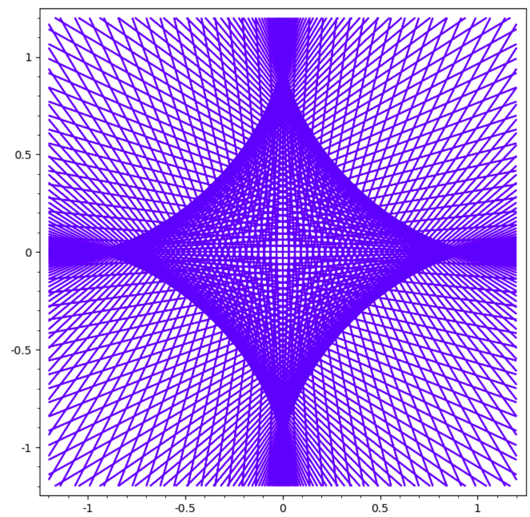

FIGURE 3.9 – L'enveloppe de la famille $D_\theta = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y - \sin(\theta)\cos(\theta) = 0$ est un astroïde.

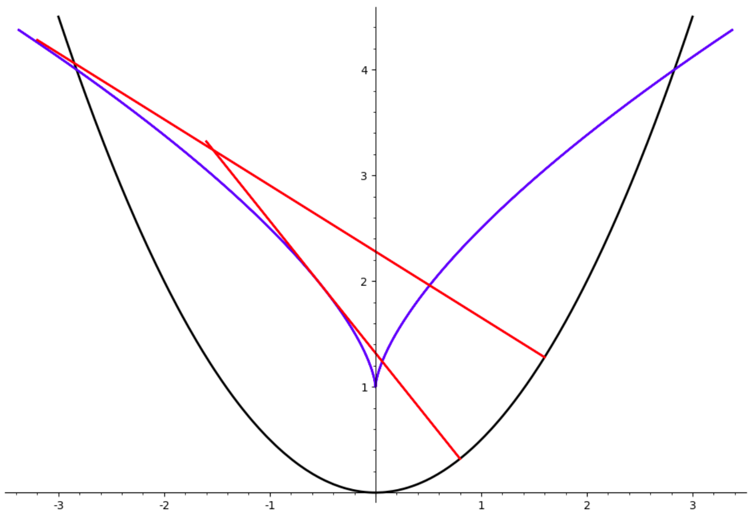

FIGURE 3.10 – Développée de la parabole

Définition 12.2 Soit f un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^2$ et de courbure non nulle. La courbe $\omega : t \mapsto$ le centre de courbure de f s'appelle la *développée* de f. Autrement dit, la développée est la courbe donnée par $\omega : t \mapsto f(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t)$, où R est le rayon de courbure et $\overrightarrow{N}$ le vecteur normal au point de paramètre t. Ainsi, $\omega(t)$ est le centre du cercle osculateur à la courbe f au point de paramètre t.

Exemple : la parabole $t \mapsto (t, t^2/2)$

On a $\omega(t) = f(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t)$, or :

$$\overrightarrow{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{N} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\begin{pmatrix}-t\\1\end{pmatrix} \qquad R = \sqrt{1+t^2}^3$$

D'où :

$$\omega_t = \begin{pmatrix}t\\t^2/2\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{1+t^2}^3}{\sqrt{1+t^2}}\begin{pmatrix}-t\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\t^2/2\end{pmatrix} + (1+t^2)\begin{pmatrix}-t\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t^3\\1+\frac{3}{2}t^2\end{pmatrix}$$

La développée de la parabole est donc la courbe bleue de la figure 3.10.

12.D. Etude de la développée

Proposition 12.2 Soit γ un arc birégulier de classe $\mathcal{C}^2$, paramétré par **l'abscisse curviligne**. On note $s \mapsto \omega(s) = \gamma(s) + R(s)\overrightarrow{N}(s)$ la paramétrisation de la développée de γ.

- $\omega'(s) = R'(s)\overrightarrow{N}(s)$
- La paramétrisation naturelle de la développée n'est pas (en général) la paramétrisation par l'abscisse curviligne.
- Si $R'(s) \neq 0$ alors la tangente à ω au point de paramètre s est la normale à la courbe γ au point de paramètre s.

Démonstration. Le premier point est un simple calcul :

$$\omega'(s) = \gamma'(s) + R'(s)\overrightarrow{N}(s) - R(s)\kappa(s)\overrightarrow{T}(s) = R'(s)\overrightarrow{N}(s)$$

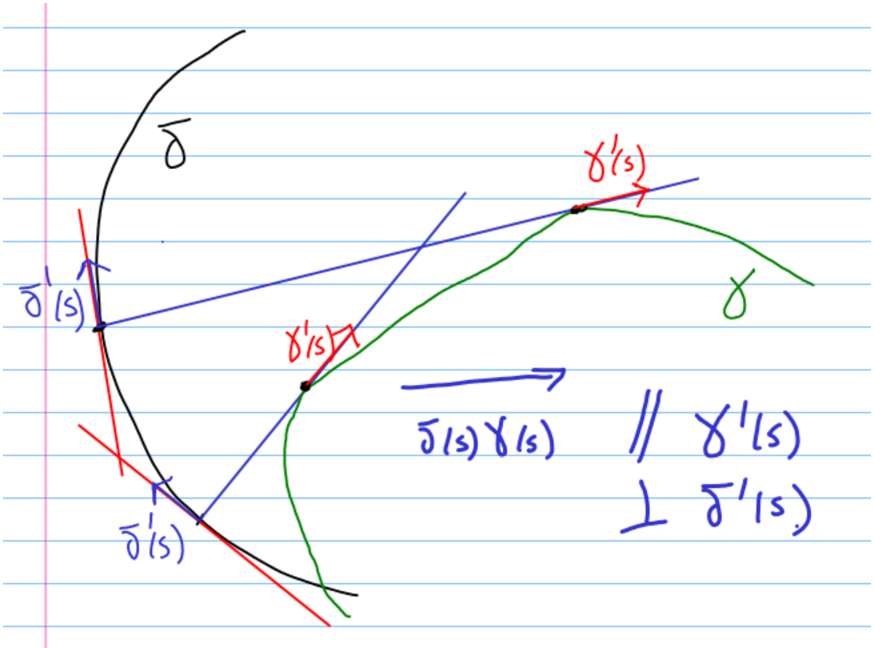

FIGURE 3.11 – Figure de la démo de la Proposition 12.4

Le second point découle du fait que $|\omega'(s)| = |R'(s)| \neq 1$, à priori. Le troisième point est une simple lecture de l'égalité $\omega'(s) = \gamma'(s) + R'(s)\overrightarrow{N}(s)$. ■

Corollaire 12.3 Soit γ un arc birégulier de classe $\mathcal{C}^2$, paramétré par la longueur d'arc. La développée est aussi l'enveloppe des normales à γ sur l'ensemble $\{R' \neq 0\}$.

Démonstration. Puisque $\omega'(s) = \gamma'(s) + R'(s)\overrightarrow{N}(s)$, la tangente à ω est la normale de γ. ■

Ce corollaire est illustré par la figure 3.10, où les normales [2] à la parabole [3] sont tangentes à la développée [4].

12.E. La développante d'une courbe

C'est quoi ?

Définition 12.3 Soit γ un arc birégulier de classe $\mathcal{C}^2$, paramétré par l'abscisse curviligne. Une *développante* d'une courbe γ est une courbe δ telle que :

$$\text{développée}(\delta) = \gamma$$

Proposition 12.4 Soit γ un arc birégulier de classe $\mathcal{C}^2$, paramétré par la l'abscisse curviligne. Les développantes δ de γ sont données par :

$$\delta(s) = \gamma(s) - (s - s_0)\gamma'(s) \quad \text{pour un } s_0 \in \mathbb{R}$$

2. en rouge
3. en noir
4. en bleue

Démonstration. Comme la développée de δ est γ, la normale au point de paramètre s à δ est la tangente en $\gamma(s)$ à γ. Autrement dit :

$$\overrightarrow{\delta(s)\gamma(s)} /\!\!/ \gamma'(s) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\delta(s)\gamma(s)} \perp \delta'(s)$$

On peut donc chercher δ sous la forme :

$$\delta(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\gamma'(s)$$

où λ est une fonction (inconnue) de classe $\mathcal{C}^1$. Enfin, on sait que :

$$\delta'(s) \perp \gamma'(s)$$

Or,

$$\delta'(s) = \gamma'(s) + \lambda'(s)\gamma'(s) + \lambda(s)\gamma''(s)$$

Rappel :

$$\gamma'(s) = \overrightarrow{T}(s) \qquad \perp \qquad \gamma''(s) = \kappa(s)\overrightarrow{N}(s)$$

Ainsi, λ est solution si et seulement si $1 + \lambda' = 0$, autrement dit $\lambda(s) = s_0 - s$. D'où le résultat. ∎

De façon plus générale,

Corollaire 12.5 Les développantes de l'arc birégulier de classe $\mathcal{C}^2$, $t \mapsto f(t)$ sont données par :

$$t \mapsto f(t) - \ell(t)\overrightarrow{T}(t)$$

où $t \mapsto \ell(t)$ est la longueur de la courbe entre le point de paramètre t_0 et t, où t_0 est un temps fixé à l'avance.

R [Non-mathématique, plutôt mécanique] Il s'agit de la courbe parcourue par votre main si vous déroulez un fil enroulé autour de la courbe de départ. C'est pas un phrase, facile à comprendre... Imaginez que vous avez une bobine de fil à coudre dans les mains (en terme de maths, on prend l'exemple $\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$), et vous déroulez le fil en gardant le fil tendu, le segment : votre doigt - fil -jusqu'à la bobine est donc tangent à la bobine $\overrightarrow{\delta(s)\gamma(s)} /\!\!/ \gamma'(s)$ et la longueur du fil déroulé est égale à la longueur du fil tendu d'où :

$$\delta(s) = \gamma(s) - s\gamma'(s)$$

12.F. Exemple : la développante du cercle

Une développante du cercle est donc la courbe donnée en coordonnées complexes par :

$$s \mapsto e^{is} - sie^{is} = (\cos(s) + s\sin(s), \sin(s) - s\cos(s))$$

R [Non-mathématique, plutôt mécanique] La forme des engrenages épouse un arc de cette courbe.

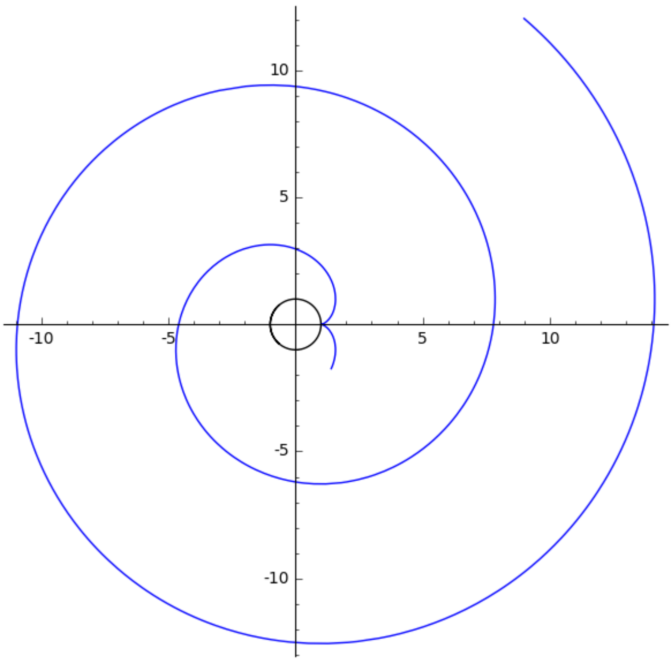

FIGURE 3.12 – Développante du cercle pour $t = -2 \ldots 15$

Exercice 3.2 Calculer et dessiner la développante de la chainette $x \mapsto \text{ch}(x)$. La courbe obtenue s'appelle la tractrice. Voir TD.

R Attention, les courbes pour $s_0 = 0$, ou $s_0 = 27\pi + 32$ ne se ressemblent pas forcément.