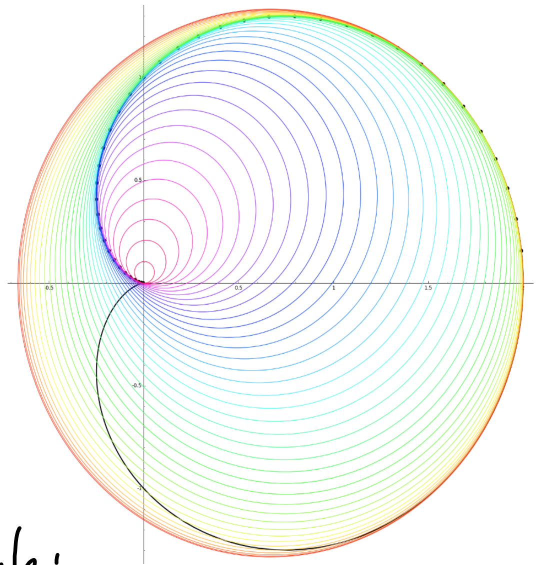
Exercice 3

Calculer la courbure des courbes suivantes :

- $\theta \mapsto \rho(\theta) = \theta^\alpha$, pour $\alpha > 0$, définie pour $\theta > 0$.
- La cycloïde.
- La cardioïde $\rho = 1 + \cos(\theta)$



La cardioïde

$$\rho = 1 + \cos\theta$$

On va utiliser la formule :

$$K(\theta) = \frac{[f'(\theta), f''(\theta)]}{|f'(\theta)|^3} = \frac{2\rho'^2 + \rho^2 - \rho\rho''}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$$

$$\rho = 1 + \cos\theta \qquad \rho' = -\sin\theta \qquad \rho'' = -\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
2\rho'^2 + \rho^2 - \rho\rho'' &= 2\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2 - (1+\cos\theta)(-\cos\theta) \\
&= 2\cancel{\sin^2}\theta + 1 + \cancel{\cos^2}\theta + 2\cos\theta + \cos\theta + \cancel{\cos^2}\theta \\
&= 2 + 1 + 3\cos\theta \\
&= 3(1+\cos\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho^2 + \rho'^2 = (1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta &= 2 + 2\cos\theta \\
&= 2(1+\cos\theta)
\end{aligned}$$

$$K(\theta) = \frac{3(1+\cos\theta)}{(2(1+\cos\theta))^{3/2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}(1+\cos\theta)^{-1/2}.$$

Or $1+\cos\theta = 2\cos^2\theta/2$

Finalement, on trouve :

$$\kappa(\theta) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{|\cos\theta/2|} = \frac{3}{4|\cos\theta/2|}$$

Exercice 4

On considère la courbe f donnée par $t \mapsto (t, \ln(t))$.

1. Déterminer l'ensemble de départ de f.
2. Calculer le rayon R de courbure f en tout point.
3. Etudier et calculer les extrema de $t \mapsto |R(t)|$.

1. Le domaine de définition est $\mathbb{R}_+^*$.

2. La courbe f est le graphe de la fonction $g(x) = \ln(x)$.
La courbure de f au point de paramètre t est donnée par :

$$\kappa(t) = \frac{g''(t)}{(1+g'(t)^2)^{3/2}}$$

Or : $g = \ln(t)$ $\quad g'(t) = 1/t$ $\quad g''(t) = -1/t^2$

Donc $R(t) = 1/\kappa(t) = \dfrac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{3/2}}{-\frac{1}{t^2}} = \dfrac{-t^2(t^2+1)^{3/2}}{t^3}$

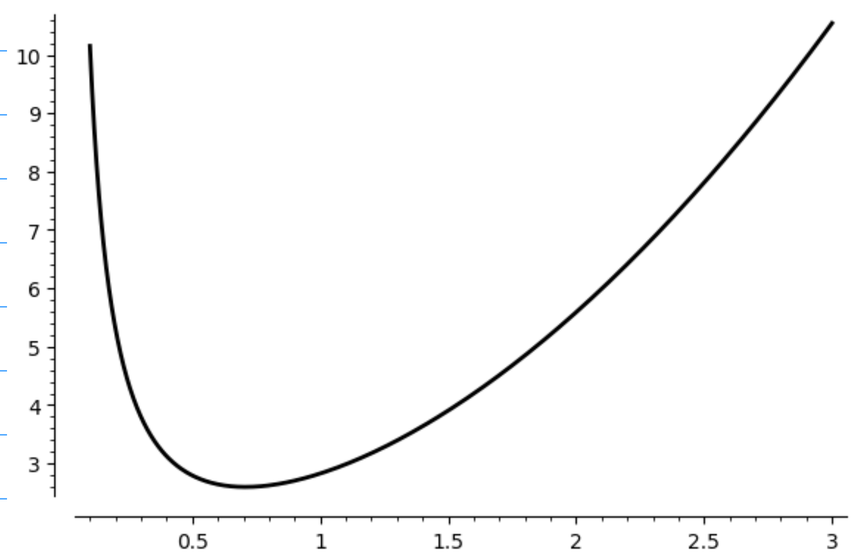
$$= -t^{-1}(1+t^2)^{3/2}$$

3. On étudie la fct $|R| : t \mapsto t^{-1}(1+t^2)^{3/2}$

$$|R|'(t) = t^{-1} \times \frac{3}{2} \times 2t\,(1+t^2)^{1/2} - t^{-2} \times (1+t^2)^{3/2} = (1+t^2)^{1/2}\left(3 - t^{-2}(1+t^2)\right)$$

$$= (1+t^2)^{1/2}\left(2 - t^{-2}\right)$$

t	0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$\lvert R\rvert'$		$-$	0	$+$	
$\lvert R\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

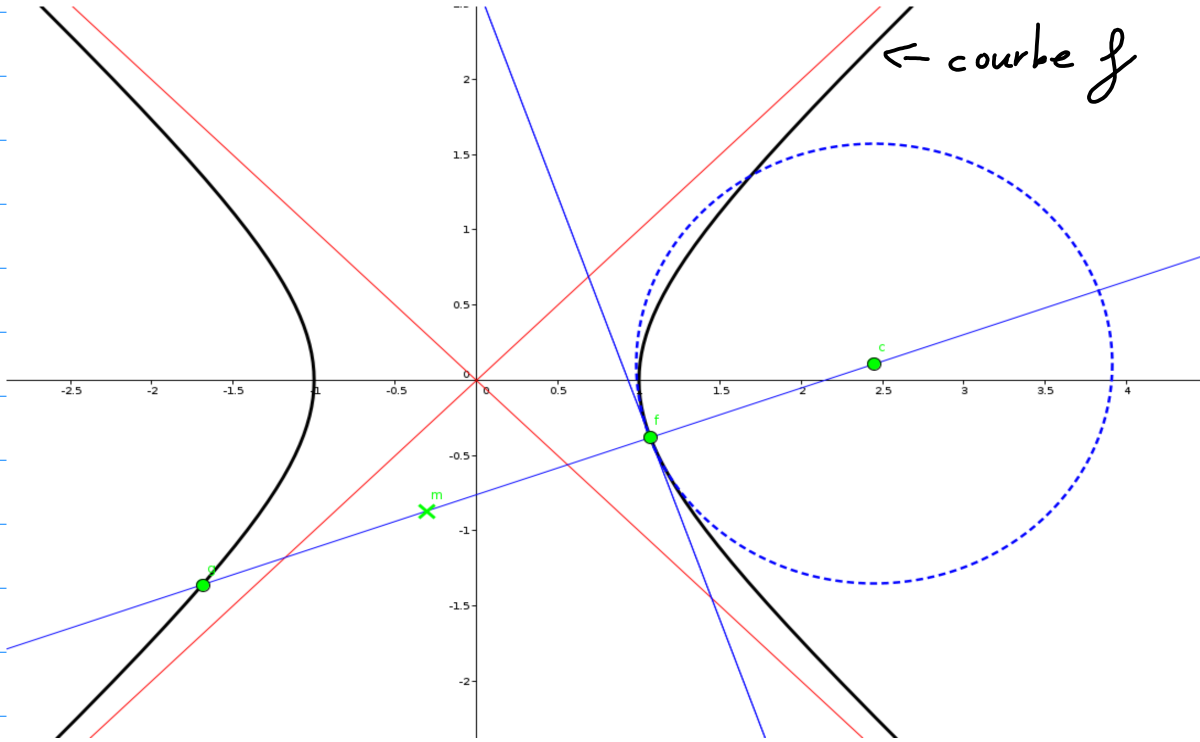


Le graphe de $|R|$

Exercice 5

On considère l'hyperbole équilatère donnée par la paramétrisation $t \mapsto (\cosh(t), \sinh(t))$.

1. Tracer la courbe.
2. Calculer le rayon de courbure au point de paramètre t.
3. On note $g(t)$ le second point d'intersection de la normale à la courbe f en $f(t)$. Faire un dessin.
4. Montrer que $|f(t) - g(t)| = 2|R(t)|$.



1. La courbe f est la branche de droite de l'hyperbole $\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$

2. $f(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t \\ \operatorname{sh} t \end{pmatrix}$ $\quad f'(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} t \\ \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$ $\quad f''(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t \\ \operatorname{sh} t \end{pmatrix}$

La courbure de f au pt de paramètre t est donnée par :

$$K(t) = \frac{[f'(t), f''(t)]}{|f'(t)|^{3/2}}$$

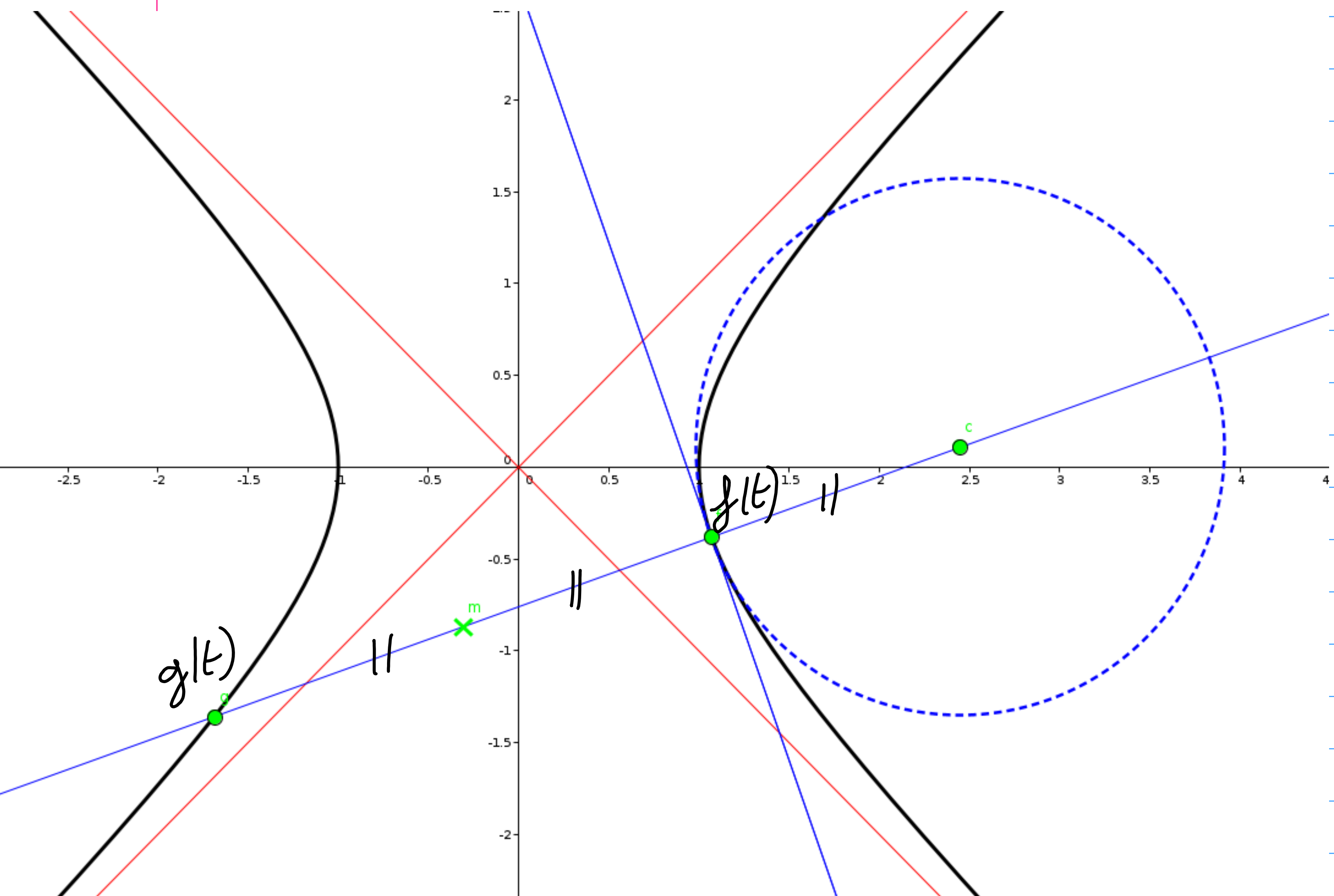
$$[f'(t), f''(t)] = sh^2 t - ch^2 t = -1$$

$$|f'(t)|^2 = sh^2 t + ch^2 t = ch(2t)$$

$$R(t) = 1/\varkappa(t) = -ch(2t)^{3/2}$$

$$|R|(t) = ch(2t)^{3/2}$$

3.



4. On commence par calculer les coordonnées de g(t), pour cela, il nous faut les coord. du vecteur directeur de la normale à la courbe f au point de paramètre t.

La tangente est dirigée par : $\begin{pmatrix} \operatorname{sh} t \\ \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$

La normale ______ : $\begin{pmatrix} -\operatorname{ch} t \\ \operatorname{sh} t \end{pmatrix}$

Une paramétrisation de la normale est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t \\ \operatorname{sh} t \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} t \\ \operatorname{sh} t \end{pmatrix} \quad \text{pour } u \in \mathbb{R}$$

(en $u=0$, on a le pt $f(t)$)

Les points $f(t)$ et $g(t)$ sont les solutions en u de l'équation :

$$x_u^2 - y_u^2 = 1$$

Que l'on réécrit :

$$(\operatorname{ch} t - u \operatorname{ch} t)^2 - (\operatorname{sh} t + u \operatorname{sh} t)^2 = 1$$

$$\underbrace{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}_{=1} + u^2 \underbrace{(\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t)}_{=1} - 2u(\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t) = 1$$

$$\rightsquigarrow \boxed{u\left(u - 2\operatorname{ch}(2t)\right) = 0}$$

La solution $u = 0$: correspond au pt $f(t)$

$u = u_0 = 2\operatorname{ch}(2t)$: ——— $g(t)$

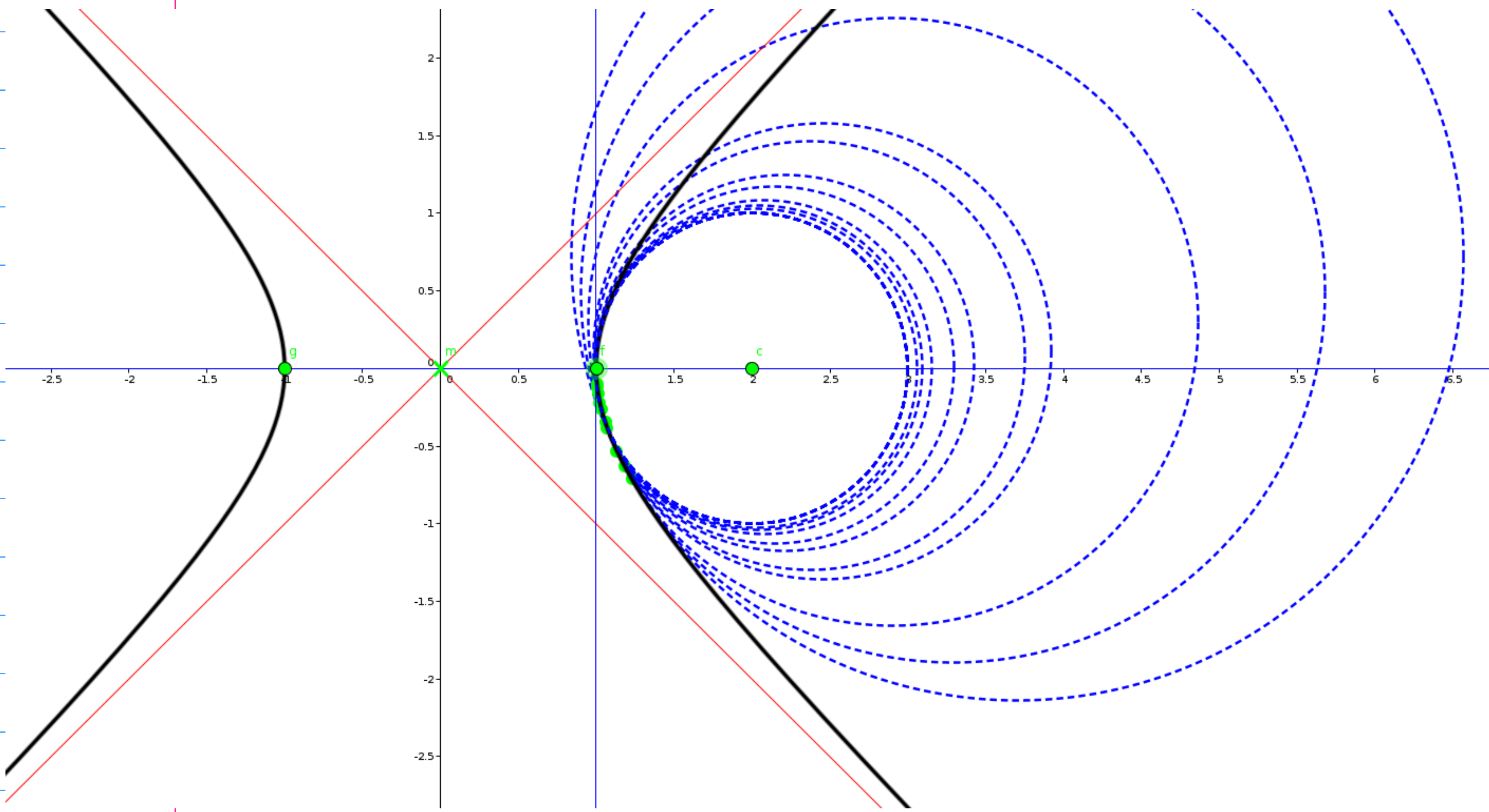
$$\| f(t) - g(t) \| = |u_0| \times \left\| \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} t \\ \operatorname{sh} t \end{pmatrix} \right\|$$

$$= 2\operatorname{ch}(2t) \times (\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t)^{1/2}$$

$$= 2\operatorname{ch}(2t) \times (\operatorname{ch}(2t))^{1/2}$$

$$= 2\left(\mathrm{ch}(2t)\right)^{3/2}$$

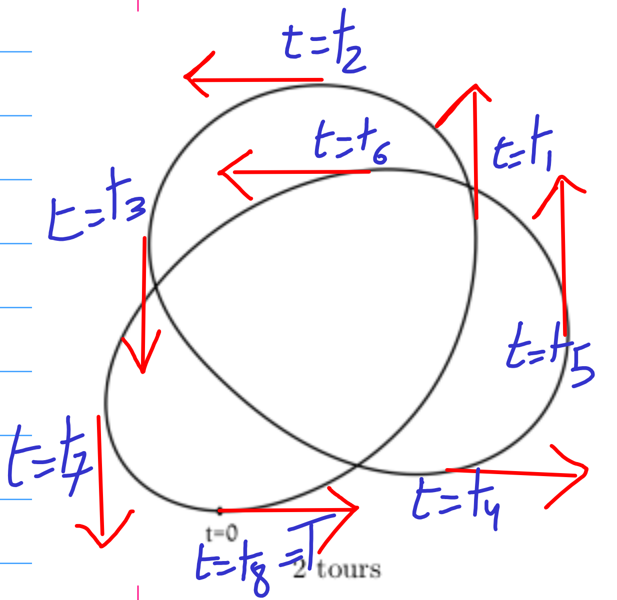
$$= 2|R|(t)$$



Exercice 7

Les 4 courbes dessinées dans la Figure 4-courbes sont parcourues dans le sens trigonométrique en partant du point indiqué $t = 0$. Colorier en rouge les zones où la courbure est positive, en vert les zones où la courbure est négative. Lesquelles sont birégulières ? Dessiner grossièrement l'allure de la fonction $\alpha : I \to \mathbb{R}$, où I est l'intervalle de définition de la courbe, α est l'unique relevé de l'angle orienté $(Ox, \vec{T}) \in \mathbb{S}^1$ qui vérifie $\alpha(0) = 0$, en particulier déterminer $\alpha(I)$.

On note $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe considérée.



La courbe est toujours positive, puisque la courbe à gauche. En particulier, cette courbe est birégulière.

On a: $\alpha'(t) = \underbrace{|f'(t)|}_{>0} \underbrace{\kappa(t)}_{>0} > 0$

La fonction $\alpha : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$

est donc une fonction strictement croissante, dérivable, de dérivée strictement positive.

$\alpha(0) = 0.$

On a marqué sur la courbe les temps t_i où la courbe passe par des tangentes horizontales ou verticales.

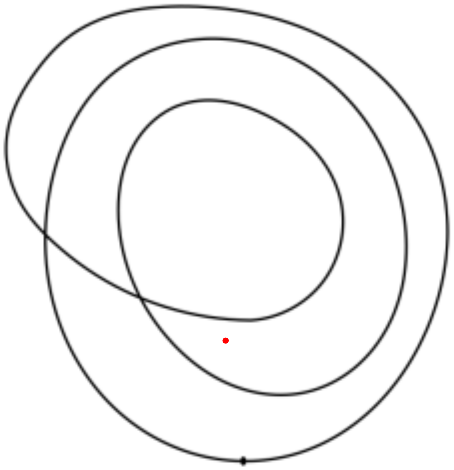
Puisque la fonction α est continue et croissante, on doit avoir:

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(t_1) = \pi/2, \quad \alpha(t_2) = \pi, \quad \alpha(t_3) = 3\pi/2$$

$$\alpha(t_4) = 2\pi, \quad \alpha(t_5) = 5\pi/2, \quad \alpha(t_6) = 3\pi$$

$$\alpha(t_7) = \frac{7\pi}{2}, \quad \alpha(t_8) = \alpha(T) = 4\pi$$

Ainsi $\alpha([0,T]) = [0, 4\pi]$



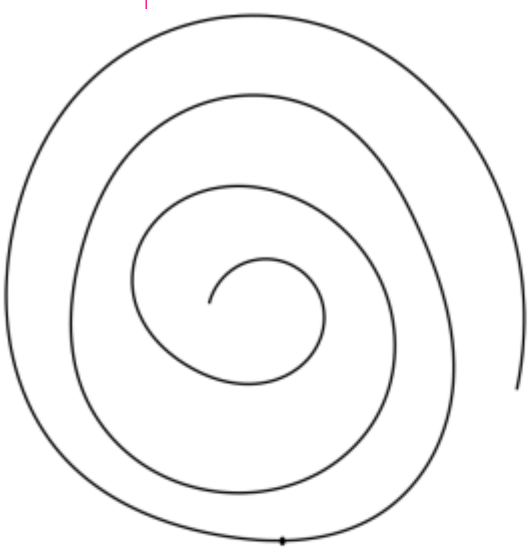
3 tours

Pour cette courbe, on trouve

$$\alpha(T) = 6\pi$$

$$\alpha([0,T]) = [0, 6\pi]$$

Avec les mêmes arguments.



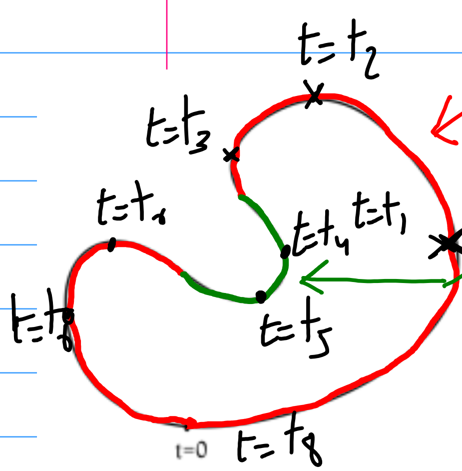
Une spirale

Cette fois-ci, la courbe est définie sur R tout entier.

Avec les mêmes arguments on trouve

$$\alpha(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection continue strictement croissante



Un haricot

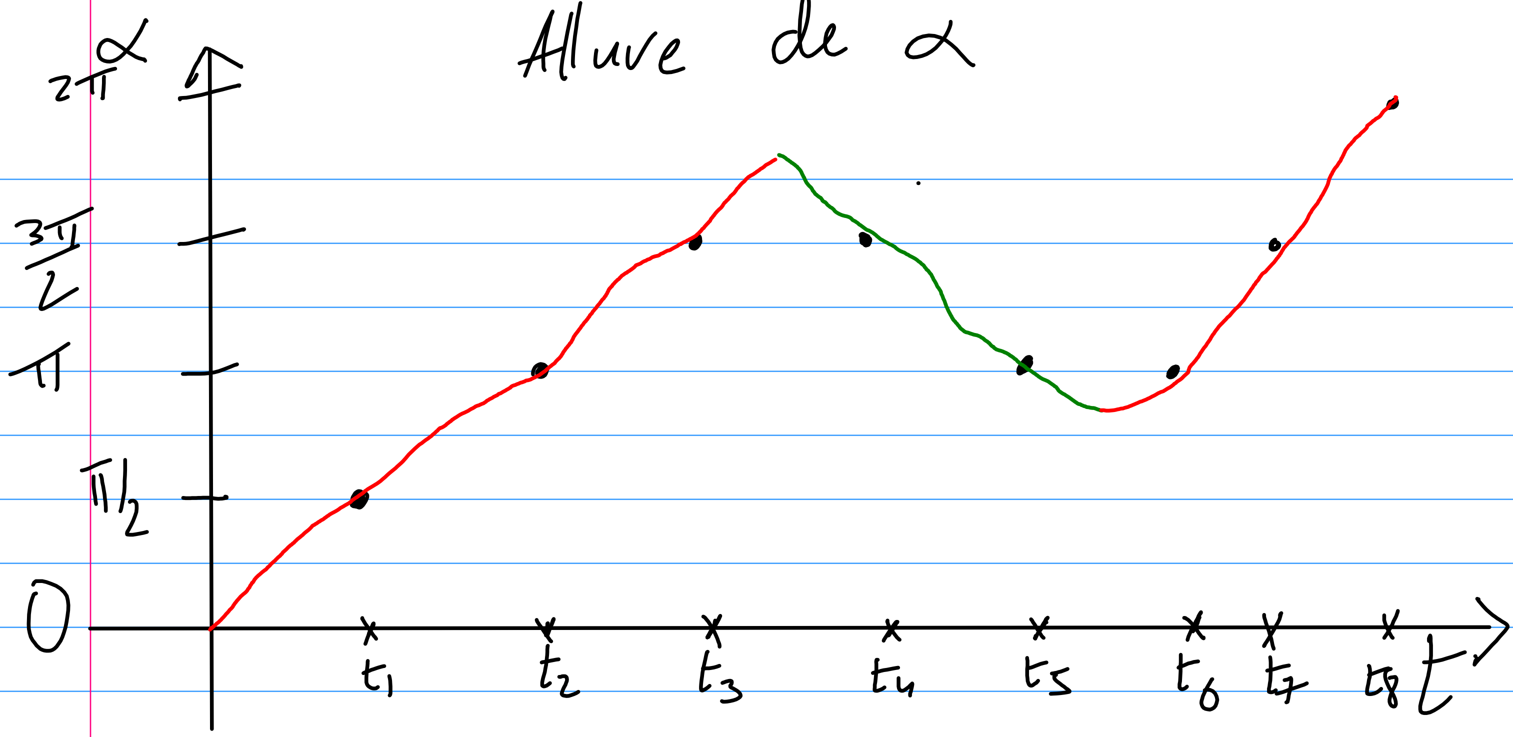
courbure > 0 $\Leftrightarrow$ La courbe tourne à gauche

courbure < 0 $\Leftrightarrow$ ——— droite

La fct α est croissante pour les t dans le rouge.

——— décroissante ——— vert.

Allure de α



On a donc $\alpha(t_8) = 2\pi$

$$\alpha([0, t_8]) = [0, 2\pi].$$