Courbes et Surfaces Paramétrées

TD n°3 :
Courbe implicite

Exercice 1

1. Montrer que l'équation :
$$x^4 + y^3 - 2x^2y - 1 = 0$$
définit implicitement y comme une fonction de x au voisinage du point $(0, 1)$.
2. Montrer que l'équation :
$$\sin y + y + e^x = 1$$
définit une courbe lisse (i.e que tous les points **de la courbe** vérifient $\nabla F \neq 0$).
3. Montrer que l'équation :
$$x^3 + y^3 - 3xy = 1$$
définit une courbe lisse.

---

1. On pose $F = x^4 + y^3 - 2x^2y - 1$. On vérifie que $F(0, 1) = 0$, le point $(0, 1)$ est donc bien sur la courbe. On a :
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 2x^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 3 \neq 0$$
L'équation $F(x, y) = 0$ définit donc une fonction $x \mapsto y$ au voisinage de $(0, 1)$ par le théorème des fonctions implicites.
2. On pose $F = \sin y + y + e^x - 1$. On a :
$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \cos(y) + 1$$
Un point du plan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point non-lisse de la courbe si et seulement s'il vérifie les 3 équations suivantes :
$$F(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$$
Or
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = e^x \neq 0$$
Donc tous les points sont lisses.
3. On pose $F = x^3 + y^3 - 3xy - 1$. On a :
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 3(x^2 - y) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 3(y^2 - x)$$
Un point du plan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point non-lisse de la courbe si et seulement s'il vérifie les 3 équations suivantes :
$$F(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$$
En particulier, il doit vérifier :
$$y = x^2 \qquad x = y^2$$

On doit donc avoir $x, y \geqslant 0$ et :

$$y = y^4 \qquad x = x^4$$

On doit donc avoir :

$$(x, y) = (0, 0) \qquad \text{ou} \qquad (x, y) = (1, 1)$$

Mais :

$$F(0, 0) = -1 \neq 0$$

donc le point $(0, 0)$ n'est pas sur la courbe.

$$F(1, 1) = -2 \neq 0$$

donc le point $(1, 1)$ n'est pas sur la courbe. La courbe est donc lisse.

4. Pour la forme, je mets les dessins des 3 courbes :

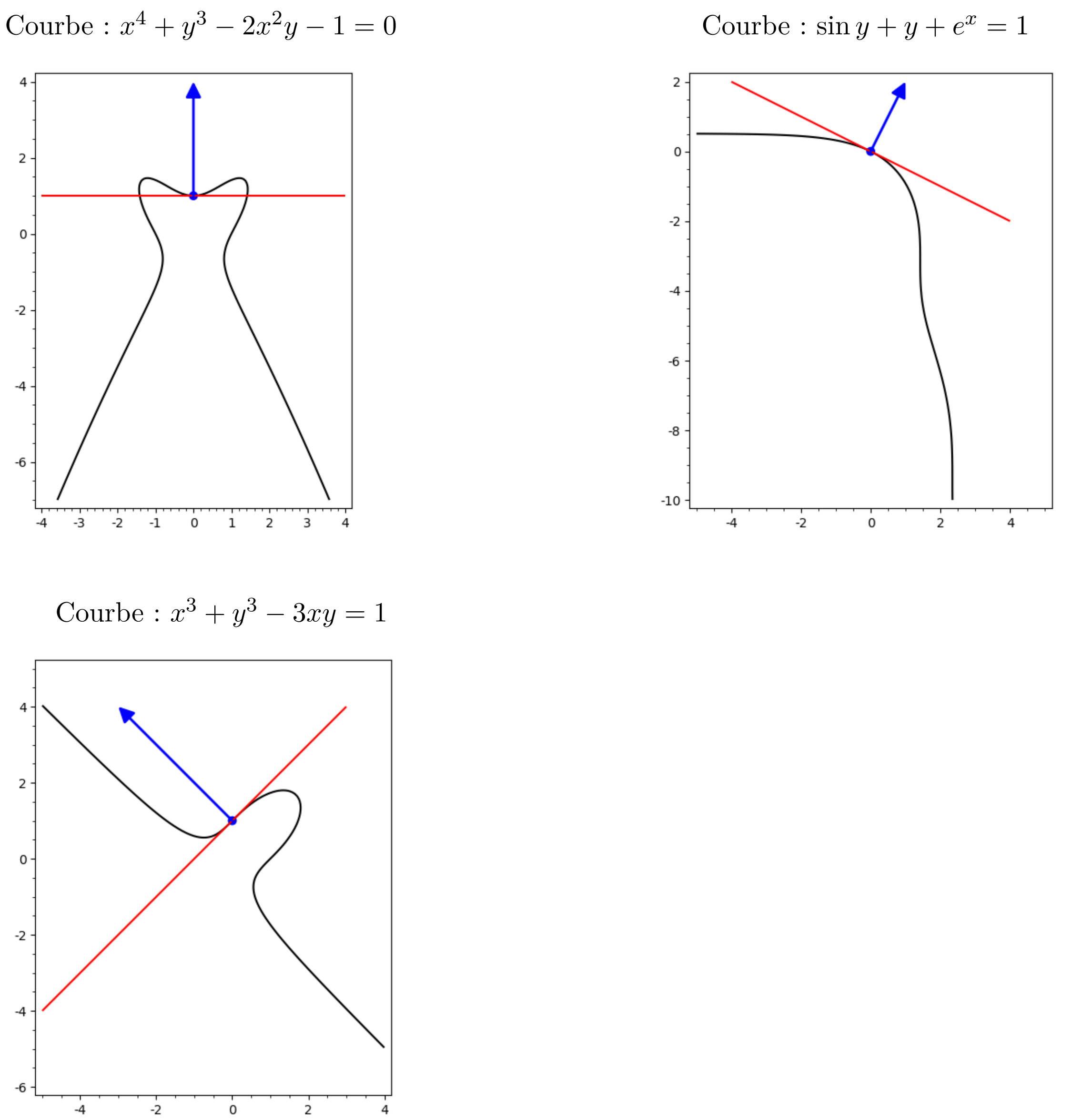


FIGURE 1 – Les courbes implicites (noir), des gradients (bleu) et des tangentes (rouge).

TSVP →

Exercice 2

Montrer que la courbe implicite :

$$y^3 + (x^2+1)y + x^4 = 0$$

définit implicitement une fonction $\varphi : x \mapsto y$ définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. *Il est important de ne pas oublier que l'équation $x = \arctan y$ ne définit pas une fonction $x \mapsto y$ définie sur $\mathbb{R}$.*

Il faut vérifier deux choses :

1. Au voisinage de tout point (x, y) sur la courbe, l'équation définit une fonction $\mathcal{C}^\infty : x \mapsto y$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $F(x, y) = 0$. *C'est ce point que ne vérifie pas, la courbe implicite : $x = \arctan y$.*

On commence par le premier point. On pose $F = y^3 + (x^2+1)y + x^4$. On a :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + x^2 + 1 \neq 0 \quad \text{car} \quad > 0$$

Ainsi, au voisinage de tout point (x, y) sur la courbe, l'équation définit une fonction $\mathcal{C}^\infty : x \mapsto y$, par le théorème des fonctions implicites.

On vérifie à présent, le second point. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose :

$$P_x(y) = y^3 + (x^2+1)y + x^4$$

La fonction $y \mapsto P_x(y)$ est un polynôme de degré 3 et on doit montrer que P_x possède une et une seule racine réelle. Comme P_x est un polynôme de degré 3, il possède au moins une racine réelle. On va montrer que $y \mapsto P_x(y)$ est une fonction strictement croissante, pour cela, on dérive :

$$P_x'(y) = 3y^2 + x^2 + 1 > 0$$

Donc P_x est une fonction strictement croissante, donc P_x possède au plus une racine réelle. Bilan, P_x possède une et une seule racine réelle.

On trace $F(x, y) = 0$ pour la forme :

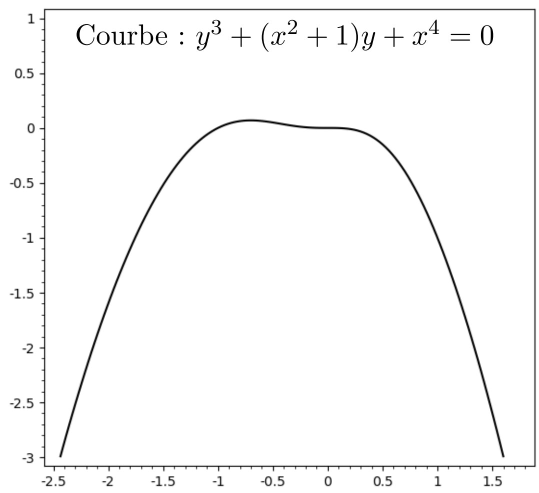


FIGURE 2 – Courbe de l'exo 2

Exercice 3

En étudiant, seulement les symétries des courbes suivantes et en raisonnant par élimination. Relier, la courbe et son équation :

Solution :

$$1 \to 3 \quad 2 \to 1 \quad 3 \to 4 \quad 4 \to 2$$

Explication : On pose :

$$F_1(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 3x(x^2-y^2) \qquad F_2(x,y) = x^2 + 10\sin(2y) - 1$$

$$F_3(x,y) = x^4 + y^4 - 3x^2 - 3y^2 - 1 \qquad F_4(x,y) = x^2 - y^3 - y - 5$$

- On a :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad F_3(x,y) = F_3(-x,y) = F_3(x,-y) = F_3(y,x)$$
La courbe correspondant à F_3 est donc symétrique par rapport l'axe (Ox), (Oy) et la première diagonale. Un seul dessin vérifie ses symétries, le premier. Donc $1 \to 3$.
- On a :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad F_1(x,y) = F_1(x,-y)$$
La courbe correspondant à F_1 est donc symétrique par rapport l'axe (Ox). Un seul dessin vérifie cette symétrie, le second. Donc $2 \to 1$.
- On a :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad F_4(x,y) = F_4(-x,y)$$
La courbe correspondant à F_4 est donc symétrique par rapport l'axe (Oy). Un seul dessin vérifie cette symétrie, le troisième. Donc $3 \to 4$.
- On a :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad F_2(x,y) = F_2(x,y+\pi)$$
La courbe correspondant à F_2 est donc invariante par translation de vecteur : $\begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$. Un seul dessin vérifie cette symétrie, le quatrième. Donc $4 \to 2$.

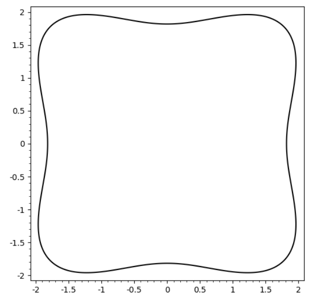
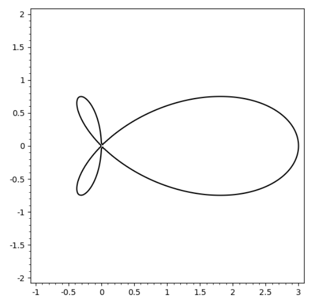
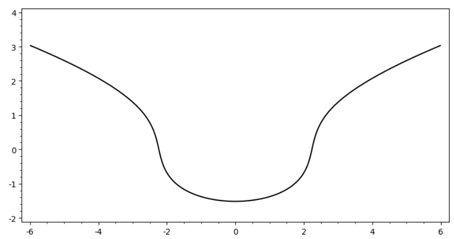
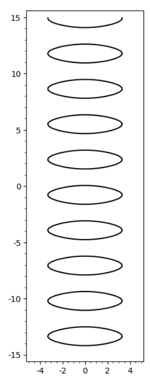
		$(x^2+y^2)^2 - 3x(x^2-y^2) = 0.$
		$x^2 + 10\sin(2y) - 1 = 0.$
		$x^4 + y^4 - 3x^2 - 3y^2 = 1.$
		$x^2 - y^3 - y - 5 = 0.$

FIGURE 3 – Un jeu d'enfant

Exercice 4

Soit P un polynôme de degré n, scindé à racines simples, dont le coefficient dominant est 1.

1. Rappeler la forme de P à l'aide de ses racines.
2. Tracer grossièrement $x \mapsto P(x)$.
3. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ définie implicitement par $y^2 = P(x)$ est lisse.
4. Chercher les symétries de $\mathcal{C}$.
5. Calculer la tangente aux points d'ordonnées nulles.
6. Trouver les points dont la tangente est horizontale.
7. Chercher grossièrement (i.e. trouver un encadrement des abscisses) des points dont la tangente est horizontale.
8. Tracer grossièrement $\mathcal{C}$. On écrira $\mathcal{C}$ comme réunion de deux graphes de fonctions.

---

1. Soient $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ les racines de P, alors :

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

2. Je donne l'allure uniquement si n est impair. Je vous laisse le cas n pair et j'utilise sagemath :

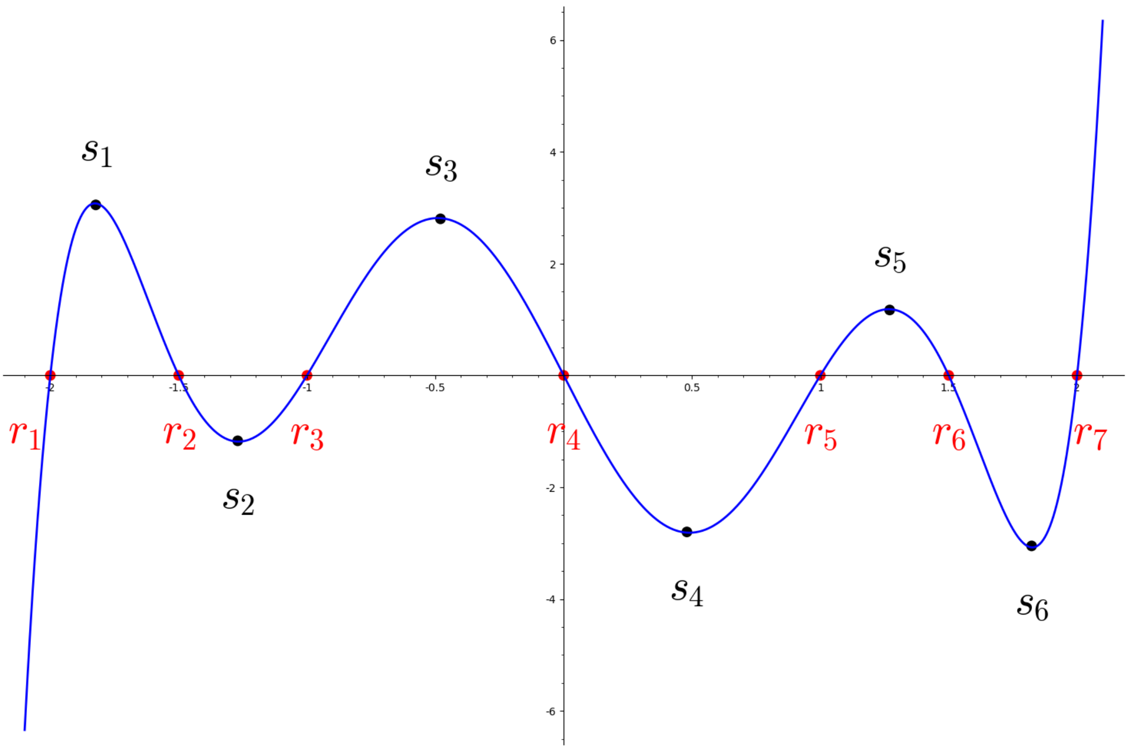


FIGURE 4 – Allure de la fonction $x \mapsto P(x)$

3. Pour montrer que la courbe $y^2 = P(x)$ est lisse. On pose $F(x, y) = y^2 - P(x)$, on se donne un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sur la courbe $\{F = 0\}$ non-lisse, un tel couple (x, y) vérifie :

$$F(x,y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$$

Ainsi, on a :

$$y^2 = P(x) \qquad \text{et} \qquad P'(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad 2y = 0$$

Autrement dit :

$$y = 0 \qquad \text{et} \qquad P(x) = P'(x) = 0$$

Ainsi, x est racine double de P, or P n'a pas de racine double. Donc la courbe est lisse.

4. La fonction F vérifie :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) = F(x,-y)$$
Donc, la courbe $\{F=0\}$ est symétrique par rapport à l'axe (Ox).

5. Le point $(x,0)$ est sur la courbe si et seulement si x est une racine de P. En effet, en un tel point, on a :
$$F(x,0) = 0^2 - P(x) = 0, \qquad \text{de plus} \qquad \nabla F\,(x,0) = \begin{pmatrix} P'(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$
Donc :
$$P(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \nabla F\,(x,0) = \begin{pmatrix} P'(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$
Or $P'(x) \neq 0$ puisque P n'a que des racines simples, donc $\nabla F\,(x,0) \neq 0$. Le gradient en $(x,0)$ est horizontal donc la tangente est verticale.

6. Un point (x,y) de la courbe implicite $\{F=0\}$ possède une tangente horizontale si et seulement si son gradient est vertical, autrement dit si et seulement si :
$$F(x,y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0$$
Autrement dit, $P'(x) = 0$ et $y^2 = P(x)$. Un point (x,y) de la courbe implicite $\{F=0\}$ possède une tangente horizontale si et seulement si x est une racine de P', $P(x) > 0$ et $y = \pm\sqrt{P(x)}$.

7. Le polynôme P' possède au plus $n-1$ racines réelles puisque de degré $n-1$. Entre deux racines r_i et r_{i+1} de P le polynôme possède un et un seul extremum s_i qui est donc une racine de P'. Le polynôme P' possède donc $n-1$ racines : $s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1}$ et on a les inégalités :
$$r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \cdots < s_{n-2} < r_{n-1} < s_{n-1} < r_n$$
Les réels s_{2i+1} vérifient $P(s_{2i+1}) > 0$ et les réels s_{2i} vérifient $P(s_{2i}) < 0$.

8. La courbe implicite $\{F=0\}$ est la réunion du graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{P(x)}$ et du graphe de la fonction $x \mapsto -\sqrt{P(x)}$. La fonction $\sqrt{\cdot}$ étant croissante, les fonctions $x \mapsto P(x)$ et $x \mapsto \sqrt{P(x)}$ ont les mêmes variations. On peut donc facilement tracer la courbe implicite $\{F=0\}$.

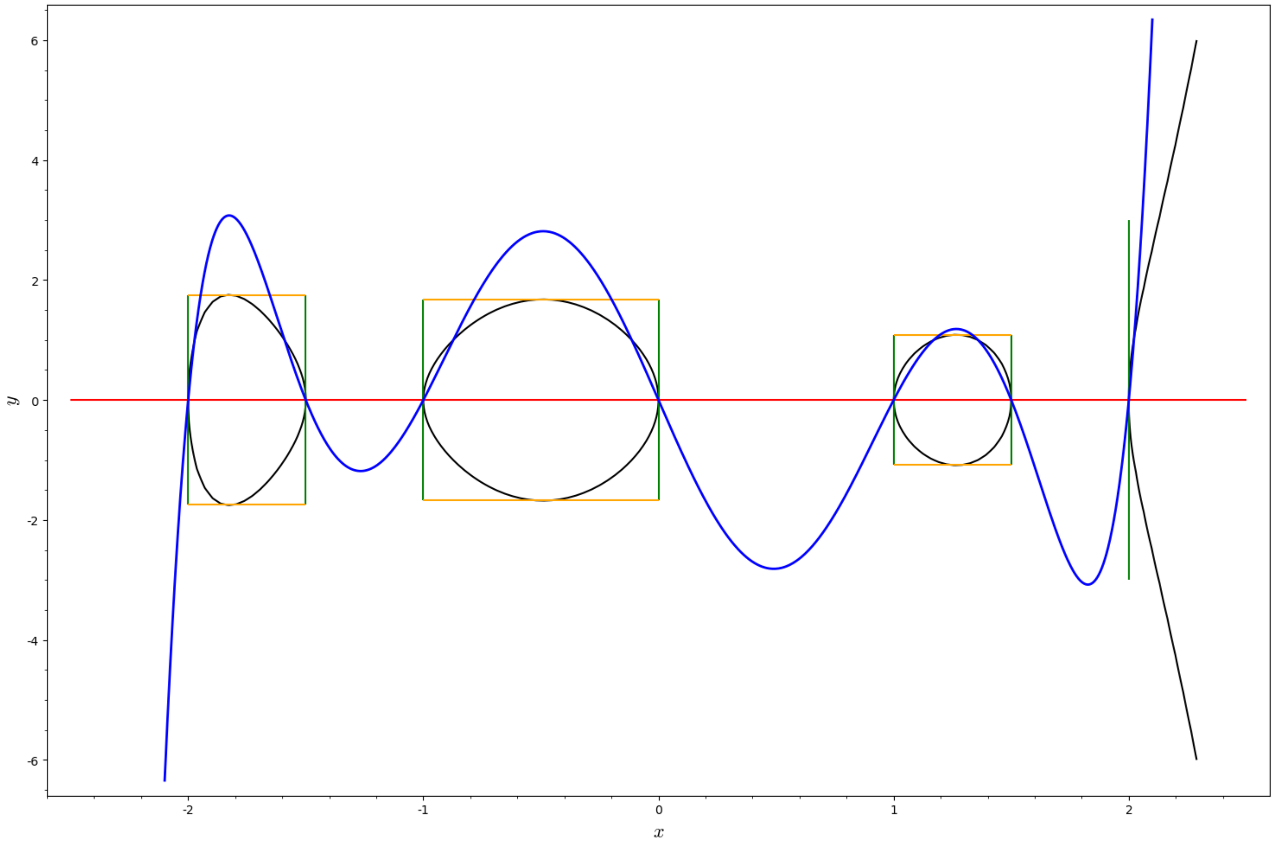


FIGURE 5 – La courbe implicite (noir) $y^2 = P(x)$, la courbe $x \mapsto P(x)$ (bleu), l'axe (Ox) (rouge), les tangentes verticales (vert) correspondent aux racines de P, les tangentes horizontales (orange) correspondent aux extremums positifs de P donc à la moitié des racines de P'.

Sans les décorations, la courbe implicite :

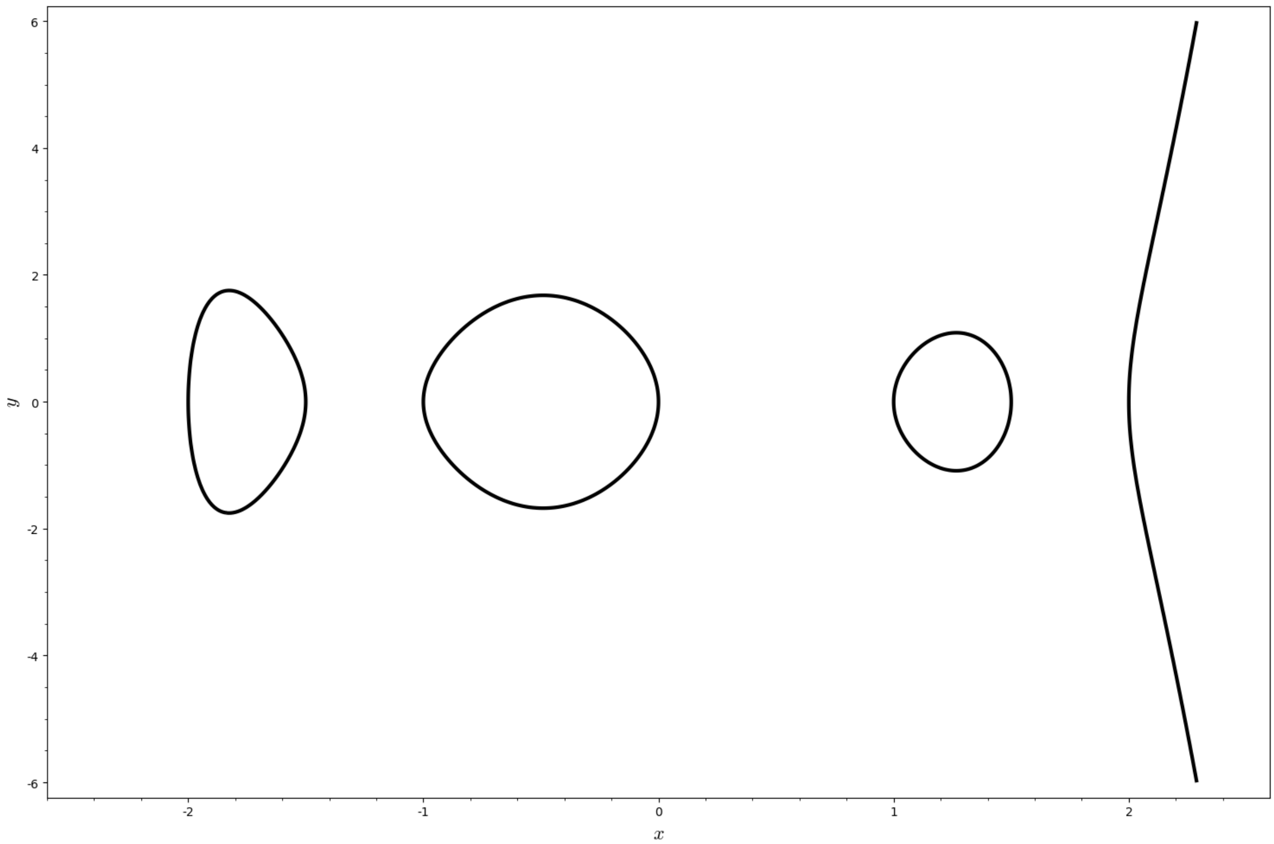


FIGURE 6 – La courbe implicite $y^2 = P(x)$ sans décoration.

Exercice 5

Si X, Y sont deux points quelconques du plan, on note XY la distance (euclidienne) entre X et Y. Soient F, F' deux points du plan et $\lambda > FF'$. On considère les ensembles :

$$\mathcal{E}_\lambda = \{M \in \mathbb{R}^2 \,|\, MF + MF' = \lambda\}$$

On suppose $\lambda > FF'$ et on admet que $\mathcal{E}_\lambda$ est une ellipse.

1. Montrer que $\mathcal{E}_\lambda$ est symétrique par rapport aux axes (Ox) et (Oy).
2. On note $E : M \mapsto MF + MF' - \lambda$. Montrer que :

$$\nabla E(M) = \frac{\overrightarrow{FM}}{FM} + \frac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}$$

3. En déduire que si M est un point sur $\mathcal{E}_\lambda$ alors la seconde bissectrice[1] de l'angle $\widehat{FMF'}$ est la tangente à $\mathcal{E}_\lambda$ en M.

   Remarque physique : imaginons un tunnel en forme d'ellipse, certaines stations de métro parisiens sont ainsi. Imaginons, que Paul est sur un quai au niveau du point F et que Lola est sur l'autre quai au niveau du point F'. Lorsque Paul parle le son suit une ligne droite (FM) puis rebondit en suivant $(F'M)$ pour arriver dans l'oreille de Lola. Ceci permet à Lola et Paul de discuter en chuchotant tout en étant sur deux quais opposés ! Ps : Il paraît que ça marche vraiment...

1. La bissectrice qui n'intersecte pas le segment $[FF']$

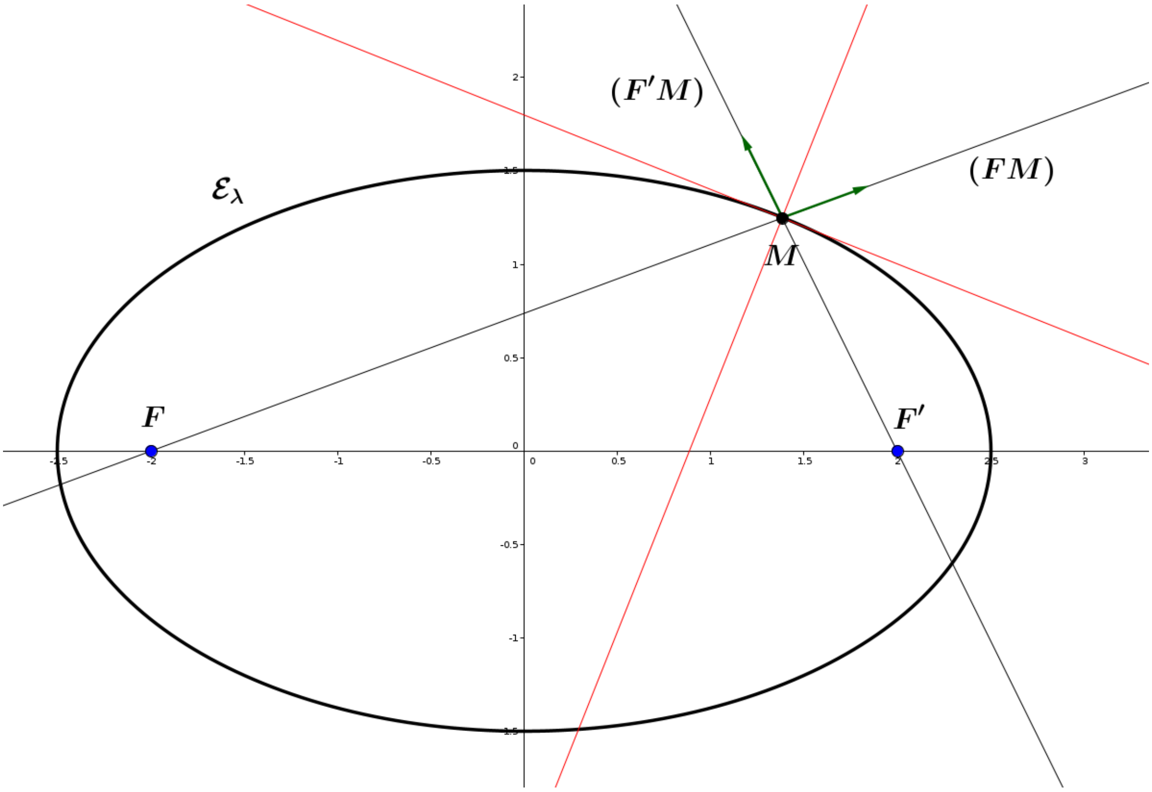


FIGURE 7 – La seconde bissectrice des droites (FM) et $(F'M)$ est la tangente à l'ellipse $\mathcal{E}_\lambda$ en M

1. On note σ_h la réflexion d'axe (Ox) et σ_v la réflexion d'axe (Oy). On a :

$$\sigma_h(F) = F \qquad \sigma_h(F') = F' \qquad \sigma_v(F) = F' \qquad \sigma_v(F') = F$$

On en déduit que :

$$\sigma_h(M)\sigma_h(F) = \sigma_h(M)F \qquad \sigma_h(M)\sigma_h(F') = \sigma_h(M)F'$$

et

$$\sigma_v(M)\sigma_v(F) = \sigma_v(M)F' \qquad \sigma_v(M)\sigma_v(F') = \sigma_v(M)F$$

On a donc :

$$E(M) = E(\sigma_h(M)) = E(\sigma_v(M))$$

Par conséquent :

$$M \in \mathcal{E}_\lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \sigma_h(M) \in \mathcal{E}_\lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \sigma_v(M) \in \mathcal{E}_\lambda$$

La courbe implicite $\mathcal{E}_\lambda$ est donc symétrique par rapport aux axes (Ox) et (Oy).

2. On note $f(M) = XM$, on va prendre des coordonnées et montrer que :

$$\nabla f(M) = \frac{\overrightarrow{XM}}{XM}$$

On note (a, b) les coordonnées de X et (x, y) les coordonnées de M, on a donc :

$$f(M) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} \times \frac{2(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = \frac{x-a}{XM}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2} \times \frac{2(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = \frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = \frac{y-b}{XM}$$

Ainsi,

$$\nabla f(M) = \frac{1}{XM}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{XM}}{XM}$$

Par conséquent :

$$\nabla E(M) = \frac{\overrightarrow{FM}}{FM} + \frac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}$$

3. On a aussi :

$$\nabla E(M) = \frac{\overrightarrow{FM}}{FM} + \frac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}$$

Soit M un point de $\mathcal{E}$, voir Figure 7. On note N le point $M + \frac{\overrightarrow{FM}}{FM}$ et P le point $M + \frac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}$. On note $\blacklozenge$ le parallélogramme de sommet M et dont les côtés d'extrémités M sont $[MN]$ et $[MP]$. Le parallélogramme $\blacklozenge$ est un losange puisque $\frac{\overrightarrow{FM}}{FM}$ et $\frac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}$ sont des vecteurs de longueur 1. On note Q le dernier point du losange $\blacklozenge$, la diagonale (MQ) est donc la première bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$. Enfin, la droite (MQ) est la droite dirigée par le gradient $\nabla F(M)$. Ainsi, la seconde bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$ est la tangente à $\mathcal{E}$ en M.