Courbes et Surfaces Paramétrées

TD n°3 :
Courbe implicite

Exercice 1

1. Montrer que l'équation :
$$x^4 + y^3 - 2x^2y - 1 = 0$$
définit implicitement y comme une fonction de x au voisinage du point $(0, 1)$.
2. Montrer que l'équation :
$$\sin y + y + e^x = 1$$
définit une courbe lisse (i.e que tous les points **de la courbe** vérifient $\nabla F \neq 0$).
3. Montrer que l'équation :
$$x^3 + y^3 - 3xy = 1$$
définit une courbe lisse.

Exercice 2

Montrer que la courbe implicite :

$$y^3 + (x^2 + 1)y + x^4 = 0$$

définit implicitement une fonction $\varphi : x \mapsto y$ définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. *Il est important de ne pas oublier que l'équation $x = \arctan y$ ne définit pas une fonction $x \mapsto y$ définie sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 3

En étudiant, seulement les symétries des courbes suivantes et en raisonnant par élimination. Relier, la courbe et son équation :

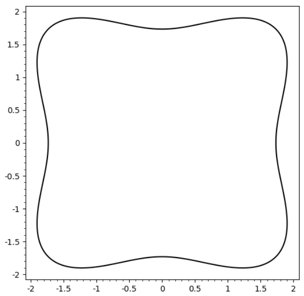
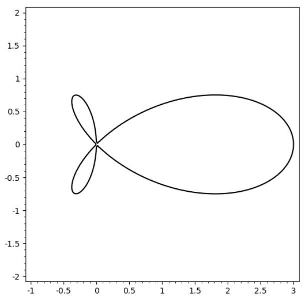
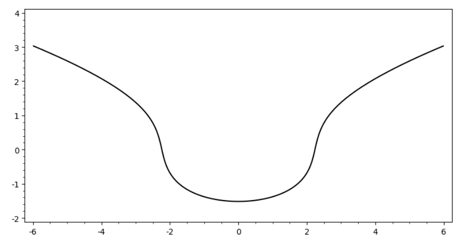
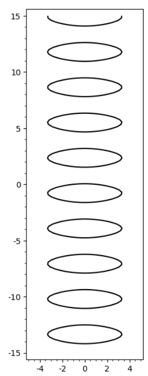
		$(x^2+y^2)^2-3x(x^2-y^2)=0.$
		$x^2+10\sin(2y)-1=0.$
		$x^4+y^4-3x^2-3y^2=1.$
		$x^2-y^3-y-5=0.$

FIGURE 1 – Un jeu d'enfant

Exercice 4

Soit P un polynôme de degré n, scindé à racines simples [1], dont le coefficient dominant est 1.

1. Rappeler la forme de P à l'aide de ses racines.
2. Tracer grossièrement $x \mapsto P(x)$.
3. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ définie implicitement par $y^2 = P(x)$ est lisse.
4. Chercher les symétries de $\mathcal{C}$.
5. Calculer la tangente aux points d'ordonnées nulles.
6. Trouver les points dont la tangente est horizontale.
7. Chercher grossièrement (i.e. trouver un encadrement des abscisses) des points dont la tangente est horizontale.
8. Tracer grossièrement $\mathcal{C}$. On écrira $\mathcal{C}$ comme réunion de deux graphes de fonctions.

Exercice 5

Si X, Y sont deux points quelconques du plan, on note XY la distance (euclidienne) entre X et Y. Soient F, F' deux points du plan et $\lambda > FF'$. On considère les ensembles :

$$\mathcal{E}_\lambda = \{M \in \mathbb{R}^2 \,|\, MF + MF' = \lambda\}$$

On suppose $\lambda > FF'$ et on admet que $\mathcal{E}_\lambda$ est une ellipse.

1. Montrer que $\mathcal{E}_\lambda$ est symétrique par rapport aux axes (Ox) et (Oy).
2. On note $E : M \mapsto MF + MF' - \lambda$. Montrer que :

$$\nabla E(M) = \frac{\overrightarrow{FM}}{FM} + \frac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}$$

3. En déduire que si M est un point sur $\mathcal{E}_\lambda$ alors la seconde bissectrice [2] de l'angle $\widehat{FMF'}$ est la tangente à $\mathcal{E}_\lambda$ en M.

   Remarque physique : imaginons un tunnel en forme d'ellipse, certaines stations de métro parisiens sont ainsi[3]*. Imaginons, que Paul est sur un quai au niveau du point F et que Lola est sur l'autre quai au niveau du point F'. Lorsque Paul parle le son suit une ligne droite (FM) puis rebondit en suivant $(F'M)$ pour arriver dans l'oreille de Lola. Ceci permet à Lola et Paul de discuter en chuchotant tout en étant sur deux quais opposés ! Ps : Il paraît que ça marche vraiment...*

   https://www.futura-sciences.com/sciences/questions-reponses/mathematiques-peut-on-parler-quai-autre-metro-8333/

---

1. C'est à dire que P possède n racines réelles et elles sont toutes distinctes.
2. La bissectrice qui n'intersecte pas le segment $[FF']$
3. Les quais des lignes 5 et 8 de la station Bastille, par exemple.

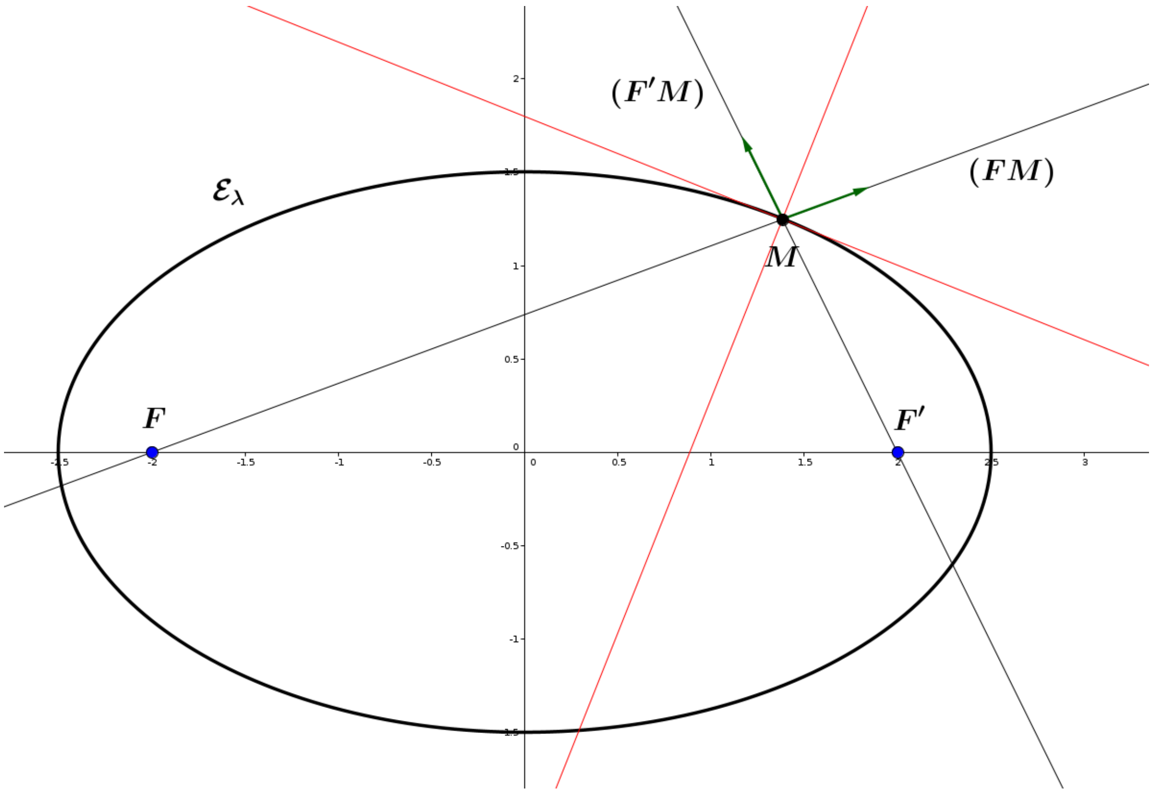


FIGURE 2 – La seconde bissectrice des droites (FM) et $(F'M)$ est la tangente à l'ellipse $\mathcal{E}_\lambda$ en M

Exercice 6

Soit $b > 0$. On cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_b$ des points $M = (x, y)$ du plan tels que :

$$\mathrm{dist}(M, -1) \cdot \mathrm{dist}(M, 1) = b$$

1. Ramener ce problème à la résolution d'une équation implicite de la forme $F(x, y) = b$.
2. Examiner les symétries du problème.
3. Montrer qu'en dehors de l'origine le gradient de F est non nul.
4. En déduire que les courbes $\mathcal{C}_b$ sont lisses sauf à priori $\mathcal{C}_1$ en l'origine.
5. On fixe une direction θ. Montrer que si on suppose que $M = \rho e^{i\theta}$ alors ρ est solution de l'équation :
$$\rho^4 + 2\cos(2\theta)\rho^2 + 1 - b^2 = 0$$
6. En déduire que $\mathcal{C}_1$ est une courbe que l'on a déjà croisé. En particulier, montrer qu'elle n'est pas lisse en l'origine.
7. Montrer que toutes ses courbes sont bornées.
8. Montrer que si $b > 1$ alors $\mathcal{C}_b$ est une courbe fermée simple.
9. Montrer que si $0 < b < 1$ alors $\mathcal{C}_b$ est l'union de deux courbes fermées simples.