Courbes et Surfaces Paramétrées

TD n°2 : Etude métrique des courbes
Correction des exos 8,9,10,11,12

En cours, j'ai dit que je notais β le relevé de l'angle $(Ox, \vec{T})$ quand le paramétrage est quelconque. Je n'ai pas corrigé sur la feuille de TD, désolé. Je corrige, en notant à partir de maintenant, le relevé de l'angle $(Ox, \vec{T})$: β.

Exercice 1

Calculer un relevé $t \mapsto \beta(t)$ de l'angle $(Ox, \vec{T})$ pour les courbes suivantes :

1. $t \mapsto (t, e^t)$
2. $t \mapsto (t, t^3)$
3. $t \mapsto (t\cos t, t\sin t)$
4. $\theta \mapsto 1 + \cos\theta$

Vérifier que l'obtient bien des difféomorphismes (en dehors éventuellement d'un nb fini de points que l'on précisera) comme prévu.

On va tout passer en coordonnées complexes parce que cela simplifie grandement la vie, et on a va utiliser de façon répéter l'assertion (★) :

$$\text{Si } x > 0, \text{ alors l'unique mesure de l'argument de } x + iy \text{ appartenant à l'intervalle }]-\pi, \pi[$$

$$\text{est donné par } \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ et ce réel appartient à l'intervalle }]-\pi/2, \pi/2[\quad (\bigstar)$$

1. La première courbe est donnée par la formule :

$$f(t) = t + ie^t, \quad f'(t) = 1 + ie^t$$

La courbe f est birégulière et tourne à gauche donc la fonction β sera un difféo strictement croissant. On remarque que la partie réelle de $f'(t)$ est toujours strictement positive. Je vous rappelle que l'on cherche une fonction continue $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que :

$$f'(t) = |f'(t)|e^{i\beta(t)}$$

Le principe (★) nous montre que l'on peut prendre[1] :

$$\beta(t) = \arctan\left(\frac{e^t}{1}\right) = \arctan(e^t)$$

La fonction $\beta : \mathbb{R} \to]0, \pi/2[$ est un difféomorphisme strictement croissant comme attendu.

2. La seconde courbe est donnée par la formule :

$$f(t) = t + it^3, \quad f'(t) = 1 + 3it^2$$

La courbe f est birégulière sauf en $t = 0$, elle tourne à droite sur la portion $]-\infty, 0]$, puis tourne à gauche sur la portion $[0, +\infty[$ donc la fonction β sera un difféo strictement décroissant sur $]-\infty, 0[$, puis un difféo strictement croissant $]0, +\infty[$. On remarque que la partie réelle de $f'(t)$ est toujours strictement positive. Le principe (★) nous montre que l'on peut prendre :

$$\beta(t) = \arctan\left(\frac{3t^2}{1}\right) = \arctan(3t^2)$$

La fonction $\beta : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est un difféo strictement décroissant sur $]-\infty, 0[$, puis un difféo strictement décroissant $]0, +\infty[$.

1. β n'est pas unique, si l'on a pas fixé $\beta(0)$.

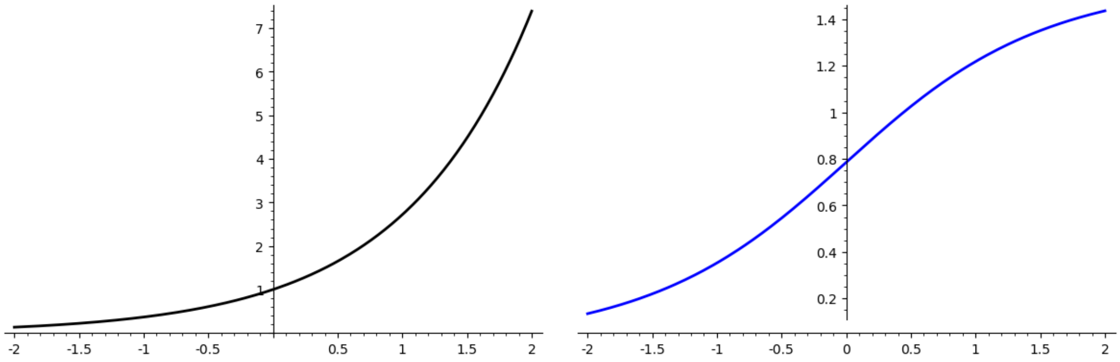

FIGURE 1 – Graphe de $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \beta(t) = \arctan(e^t)$

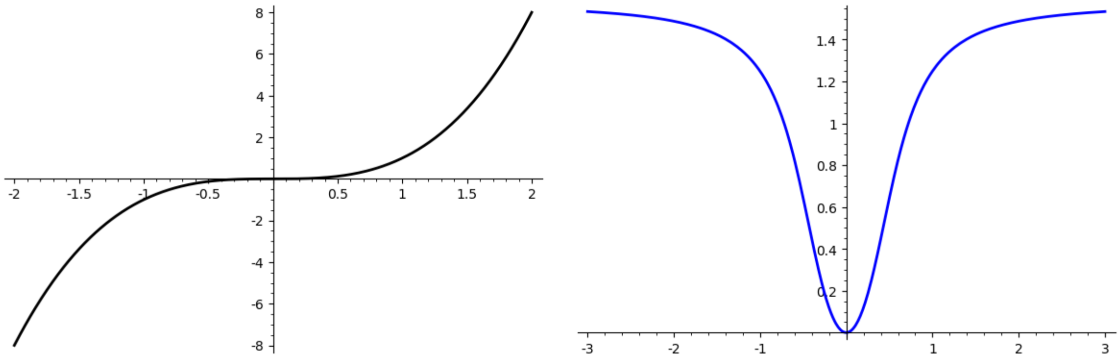

FIGURE 2 – Graphe de $t \mapsto t^3$ et $t \mapsto \beta(t) = \arctan(3t^2)$

3. La troisième courbe est donnée par la formule :

$$f(t) = te^{it}, \quad f'(t) = tie^{it} + e^{it} = (1+it)e^{it}$$

La courbe f est birégulière et tourne à gauche. La fonction β sera donc un difféo strictement croissant. Cette fois-ci, β est un peu plus difficile à calculer car la partie réelle de f' n'est pas strictement positive. Mais, on observe que $f'(t)$ s'écrit comme un produit :

$$f'(t) = \underbrace{(1+it)}_{\text{ici partie réelle}>0} \times e^{it}$$

Ainsi, la fonction **continue** $\beta(t) = \arctan(t) + t$ vérifie :

$$f'(t) = |f'(t)|e^{i\beta(t)}$$

La fonction β est donc l'unique relevé de l'angle $(Ox, \vec{T})$ de la courbe f qui vérifie $\beta(0) = 0$. Cette fonction $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un difféo strictement croissant.

4. La quatrième courbe est donnée par la formule :

$$f(\theta) = (1+\cos(\theta))e^{i\theta}, \quad f'(\theta) = (1+\cos(\theta))ie^{i\theta} - \sin(\theta)e^{i\theta} = \Big(-\sin(\theta) + i(1+\cos(\theta)\Big)e^{i\theta}$$

La courbe $f : [-\pi, \pi]$ est birégulière sauf en $-\pi$ et π et tourne à gauche. La fonction β sera donc un difféo strictement croissant. Même problème que tout à l'heure, la partie réelle de f' n'est pas strictement positive. On a une décomposition en produit mais la partie réelle du morceau devant $e^{i\theta}$ n'est pas strictement positive, aïe ! Mais, on remarque que la partie imaginaire est strictement positive

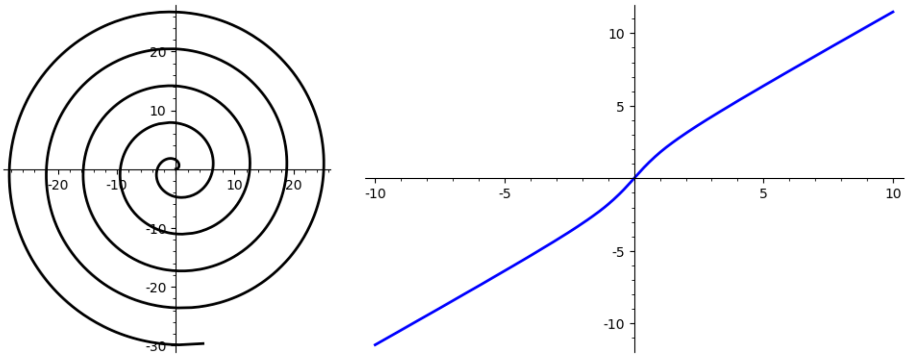

FIGURE 3 – Graphe de $t \mapsto te^{it}$ et $t \mapsto \beta(t) = t + \arctan(t)$

sur $]-\pi,\pi[$. On va donc utiliser l'égalité $-i \times i = 1$ pour s'en sortir :

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \Big(-\sin(\theta) + i(1+\cos(\theta)\Big)e^{i\theta} \\ &= \text{-}i\Big(-\sin(\theta) + i(1+\cos(\theta)\Big)\mathbf{i}e^{i\theta} \\ &= \underbrace{\Big((1+\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)}_{\text{partie réelle} >0} e^{i(\theta+\pi/2)} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction **continue** $\beta(\theta) = \arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta}\right) + \theta + \frac{\pi}{2}$ vérifie :

$$f'(\theta) = |f'(\theta)|e^{i\beta(\theta)}$$

On va faire encore un effort avant de conclure, cette expression se simplfie grandement : On a :

$$\sin(\theta) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \qquad 1+\cos(\theta) = 2\cos^2(\theta/2) \qquad \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta} = \tan(\theta/2)$$

On en tire :

$$\beta(\theta) = \arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta}\right) + \theta + \frac{\pi}{2} = \frac{3\theta+\pi}{2}$$

La fonction β est donc l'unique relevé de l'angle $(Ox, \vec{T})$ de la courbe f qui vérifie $\beta(0) = \pi/2$. Cette fonction $\beta :]-\pi,\pi[$ est un difféo strictement croissant.

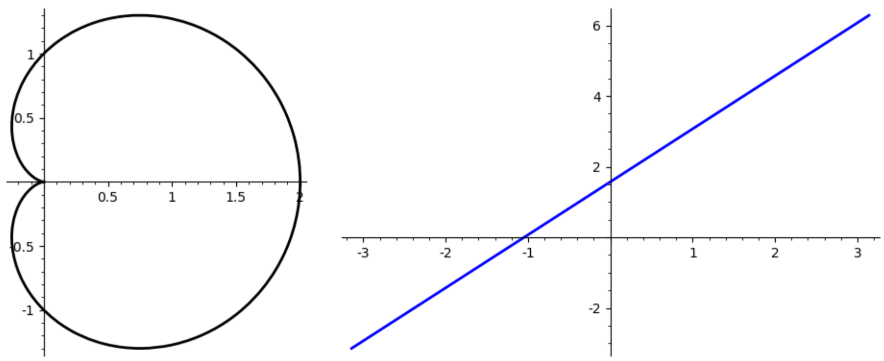

FIGURE 4 – Graphe de $\rho = 1 + \cos(\theta)$ et $\theta \mapsto \beta(\theta) = \frac{3\theta+\pi}{2}$

Exercice 2

On considère la courbe donnée par $g(x) = \ln(\cos x)$, pour $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Calculer le rayon de courbure $R(t)$. Calculer l'abscisse curviligne $s(t)$ en prenant $x = 0$ comme point de départ. Tracer la courbe et sa développée.

On commence par tracer le graphe de g, $\cos :]-\pi/2, 0] \to]0,1]$ est une bijection strictement croissante et $\cos : [0, \pi/2[\to]0,1]$ est une bijection strictement décroissante, la fonction $\ln :]0,1] \to]-\infty, 0]$ est une bijection strictement croissante.

Bilan, $g :]-\pi/2, 0] \to]-\infty, 0]$ est une bijection strictement croissante et $g : [0, \pi/2[\to]-\infty, 0]$ est une bijection strictement décroissante.

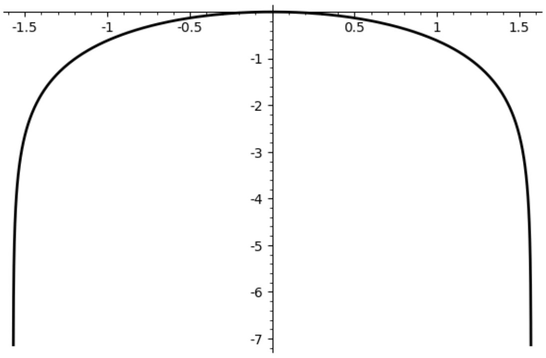

Figure 5 – Graphe de $g(x) = \ln(\cos x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

On étudie l'arc paramétré :

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos(t)) \end{pmatrix} \qquad f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sin(t)}{\cos(t)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos(t)} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos(t)} \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix}$$

Comme la fraction $\frac{1}{\cos t}$ est strictement positive et le vecteur $\begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix}$ unitaire, on obtient sucessivement :

$$|f'(t)| = \frac{1}{\cos(t)} \quad \text{et} \quad T(t) = \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix}$$

La fonction continue $\beta :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ donnée par :

$$\beta(t) = -t$$

est donc le relevé de l'angle $(Ox, \vec{T})$ qui vérifie $\beta(0) = 0$. Or, on a vu en cours que :

$$\beta'(t) = |f'(t)|\kappa(t) \quad \text{on obtient donc } -1 = \frac{\kappa(t)}{\cos t}$$

et donc :

$$R(t) = -\frac{1}{\cos t}$$

Ensuite, l'abscisse curviligne est donnée par :

$$s(t) = \int_0^t |f'(t)| dt = \int_0^t \frac{1}{\cos t} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin(t)}{1 - \sin(t)}$$

En cas de souci avec l'intégrale : lien vers une vidéo qui fait le calcul... :
`https://www.youtube.com/watch?v=kX-ULAgTBns`

On calcul à présent la paramétrisation de la développée ω de g. On a :

$$\omega(t) = f(t) + R(t)N(t) = \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos(t)) \end{pmatrix} - \frac{1}{\cos t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \tan t \\ \ln(\cos(t) - 1 \end{pmatrix}$$

La fonction $t \mapsto t - \tan t$ est un difféo strictement décroissant.

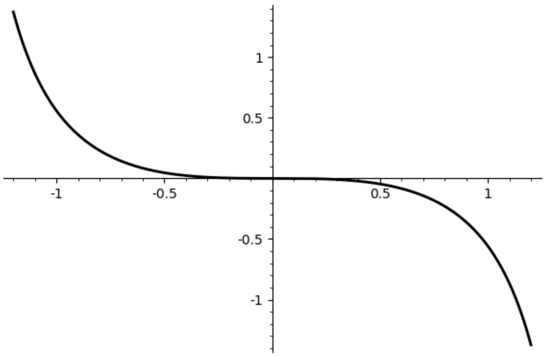

FIGURE 6 – Graphe de $x \mapsto x - \tan(x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

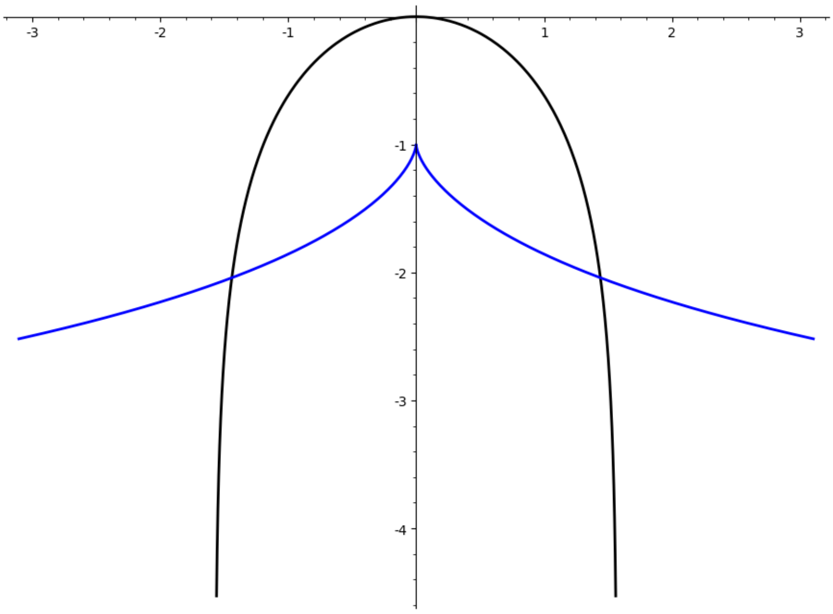

FIGURE 7 – Graphe de g (noir) et sa développée (bleue). Attention, la courbe g est parcouru de gauche à droite, mais sa développée est parcouru de droite à gauche.

Exercice 3

Soit $k > 0$. On considère la spirale logarithmique, voir figure 7, donnée en coordonnées polaires par $\rho = e^{k\theta}$, autrement dit on étudie la courbe $\theta \mapsto z(\theta) = e^{(k+i)\theta}$.
L'utilisation des nombres complexes simplifie grandement les calculs.

1. Calculer le repère de Frenet, $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$.
2. En déduire les angles $\beta = (Ox, \overrightarrow{T})$ et $(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{T})$. Interpréter.
3. Calculer la courbure au point de paramètre θ.
4. En déduire une paramétrisation de la développée (lieu des centres de courbures) de la spirale logarithmique. Reconnaitre la courbe obtenue.

---

1. En coordonnées complexes, on a :

$$f(\theta) = e^{(k+i)\theta} \quad f'(\theta) = (k+i)e^{(k+i)\theta}$$

On pose $\theta_0 = \arctan(1/k) \in]0, \pi/2[$, ainsi, on peut écrire :

$$k + i = |k+i|e^{i\theta_0} = \sqrt{1+k^2}e^{i\theta_0}$$

et donc :

$$f'(\theta) = \left(\sqrt{1+k^2}e^{k\theta}\right)e^{i(\theta+\theta_0)}$$

On a ainsi obtenu :

$$T(\theta) = e^{i(\theta+\theta_0)} \quad \text{et} \quad N(\theta) = ie^{i(\theta+\theta_0)}$$

2. La fonction $\beta(\theta) \mapsto \theta + \theta_0$ étant continue, on en déduit que le relevé de l'angle $(Ox, \overrightarrow{T})$ qui vérifie $\beta(0) = \theta_0$ est $\beta(\theta) \mapsto \theta + \theta_0$.

   L'angle $(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{T}) = \theta_0$ puisque en coordonnées complexes : $u_\theta = e^{i\theta}$. L'angle $(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{T})$ est donc constant.

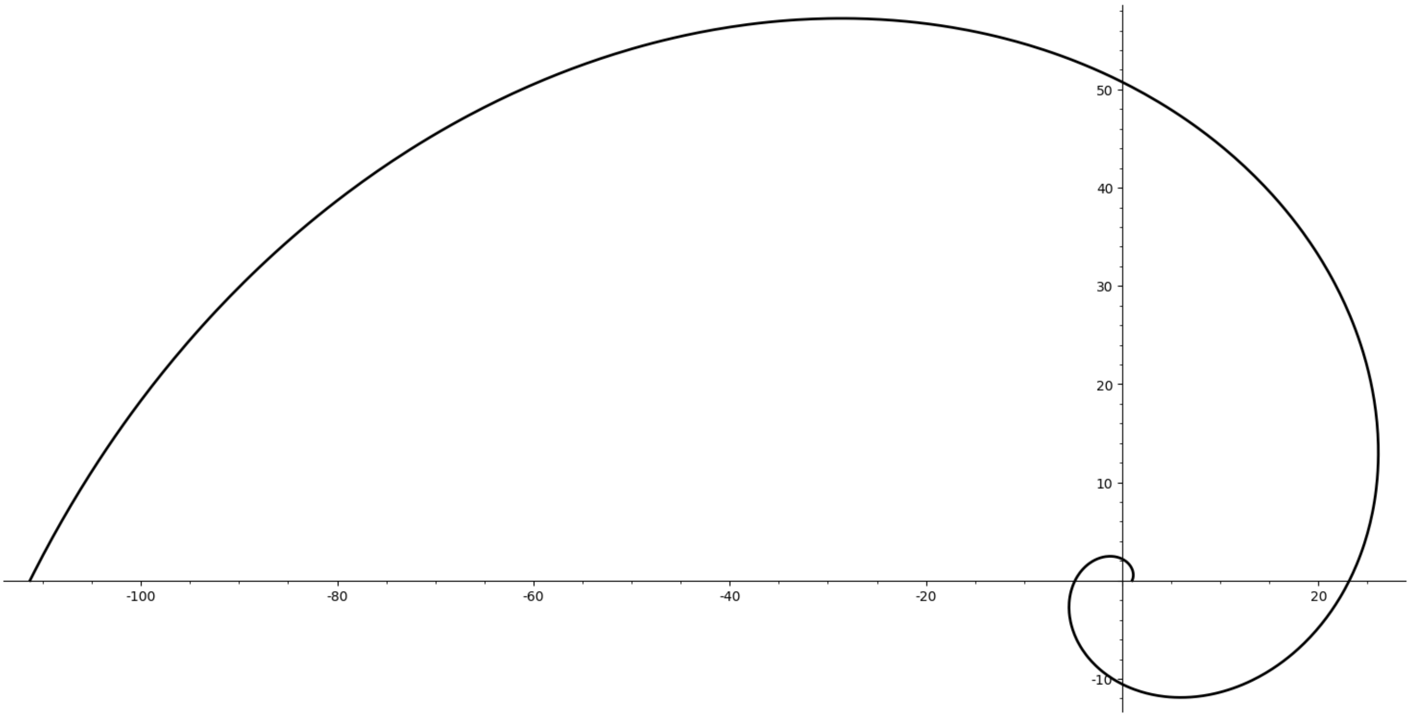

FIGURE 8 – La spirale logarithmique $\rho = e^{k\theta}$ pour $k = 0.5$

3. On a vu en cours que l'on a la formule :

$$\beta'(\theta) = |f'(\theta)|\kappa(\theta)$$

   On en tire :

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}e^{-k\theta}.$$

4. La développée ω de f est donnée par :

$$\begin{aligned}
\omega(\theta) =& f(\theta) + R(\theta)N(\theta) \\
=& e^{(k+i)\theta} + \sqrt{1+k^2}e^{k\theta} \times i \times e^{i(\theta+\theta_0)} \\
& \text{on met } e^{(k+i)\theta} \text{ en facteur} \\
=& e^{(k+i)\theta}\left(1 + \sqrt{1+k^2} \times i \times e^{i\theta_0}\right) \\
& \text{on se rappelle que } e^{i\theta_0} = \frac{k+i}{\sqrt{1+k^2}} \\
&= e^{(k+i)\theta}\Big(1 + i \times (k+i)\Big) \\
&= e^{(k+i)\theta}\Big(1 + ik - 1\Big) \\
&= e^{(k+i)\theta}\Big(ik\Big)
\end{aligned}$$

La développée ω est donc une spirale logarithmique obtenue à partir de f en faisant une rotation d'angle $\pi/2$ et une homothétie de rapport k. Autrement dit, en coordonnées polaires ω est donnée par :

$$\rho = ke^{k(\theta - \pi/2)}$$

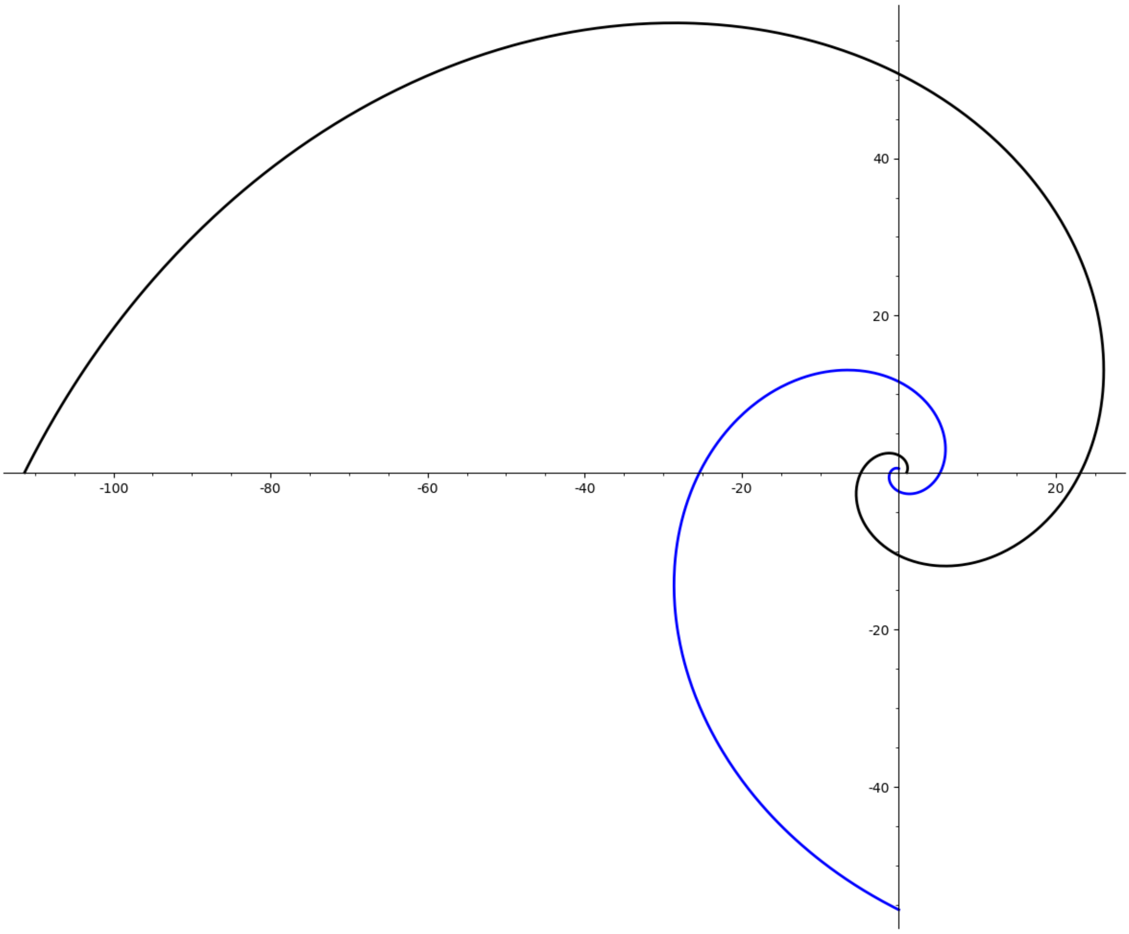

FIGURE 9 – La spirale logarithmique $\rho = e^{k\theta}$ pour $k = 0.5$ et sa développée

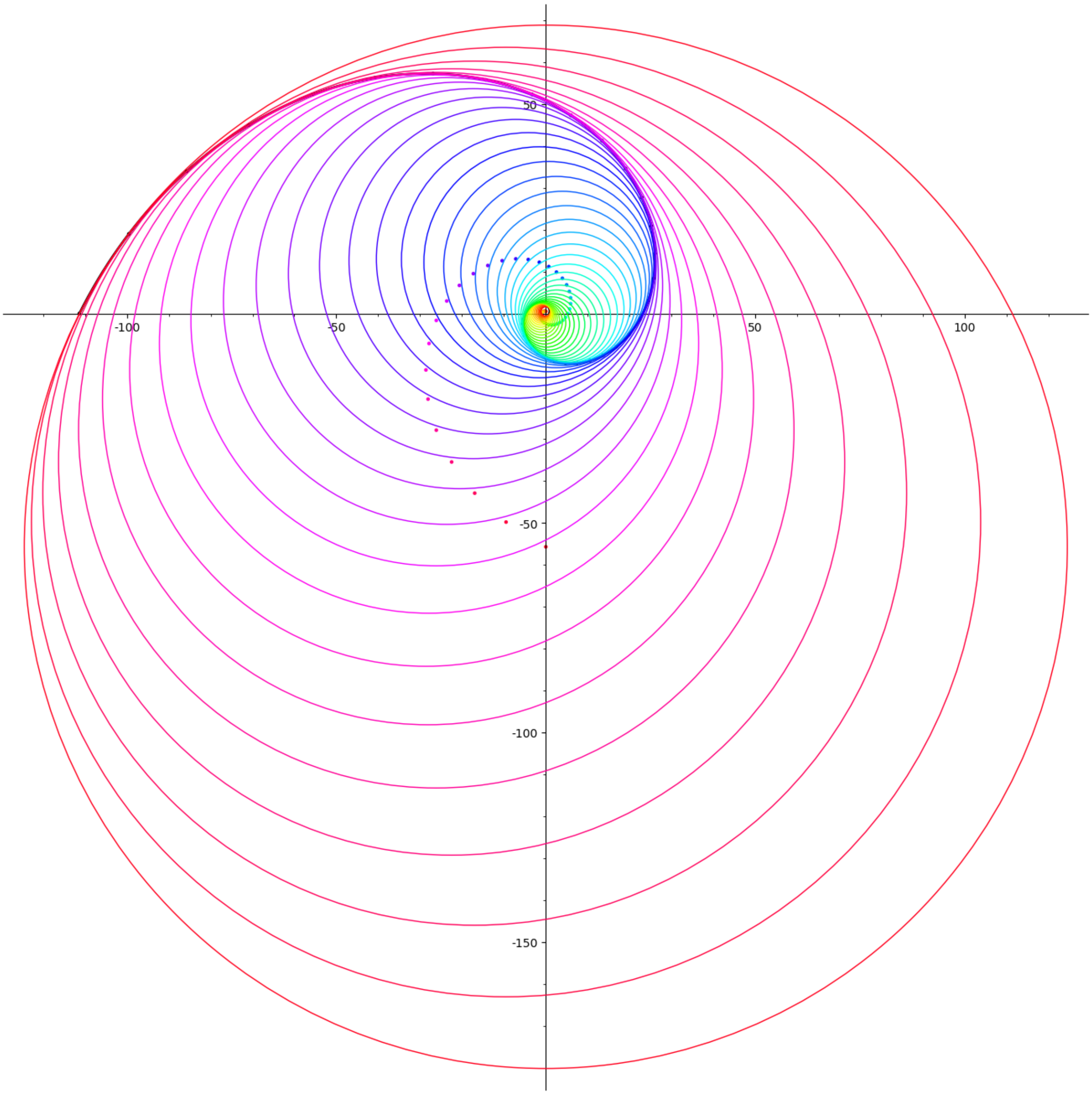

FIGURE 10 – La spirale logarithmique $\rho = e^{k\theta}$ pour $k = 0.5$ et les centres des cercles osculateurs. On voit que ses points sont sur une spirale logarithmique...

Exercice 4

Si γ une courbe birégulière de classe $\mathcal{C}^2$, alors on note s son abscisse curviligne et R son rayon de courbure. Trouver toutes les courbes qui vérifient l'équation intrinsèque :

1. $R = 1 + s^2$.
2. $R = \sqrt{1 - s^2}$.

Indication : Commencer par calculer explicitement $s \mapsto \alpha(s)$, en déduire $s \mapsto (x'(s), y'(s))$, intégrer pour obtenir $s \mapsto (x(s), y(s))$. Enfin, chercher à reparamétriser, si besoin, pour reconnaître une courbe classique.

---

1. On a :

$$R(s) = 1 + s^2 \qquad \text{donc} \qquad \kappa(s) = \frac{1}{1 + s^2}$$

Or :

$$\alpha'(s) = \kappa(s)$$

Donc
$$\alpha(s) = \arctan(s)$$
Remarque : les constantes d'intégration changeront la courbe à une isométrie près donc on choisit à chaque fois la constante qui nous arrange.

On a donc :
$$x'(s) = \cos(\arctan(s)) \qquad y'(s) = \sin(\arctan(s))$$
On commence par simplifier. On a :
$$\frac{y'(s)}{x'(s)} = \tan(\arctan(s)) = s \quad \Rightarrow \quad y'(s) = sx'(s)$$
Sans oublier que :
$$x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$$
On en tire :
$$x'(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \qquad \text{et} \qquad y'(s) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$$
Et donc :
$$x(s) = \operatorname{argsh}(s) \qquad \text{et} \qquad y(s) = \sqrt{1+s^2}$$
Autrement dit :
$$s = \operatorname{sh}(x) \qquad \text{et} \qquad y(x) = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(x)} = \operatorname{ch}(x)$$
La courbe cherchée est la chainette.

Pour le second calcul, c'est très similaire.

2. On a :

$$R(s) = \sqrt{1-s^2} \qquad \text{donc} \qquad \kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$$

Or :

$$\alpha'(s) = \kappa(s)$$

Donc

$$\alpha(s) = \arcsin(s)$$

On a donc :

$$y'(s) = \sin(\arcsin(s)) = s \qquad \text{et} \qquad x'(s) = \cos(\arcsin(s)) = \sqrt{1-s^2}$$

Et donc :

$$y(s) = s^2/2 \qquad \text{et} \qquad x(s) = \frac{1}{2}s\sqrt{1-s^2} + \frac{1}{2}\arcsin(s)$$

Pour la dernière intégration (un peu pas facile...) voir :https://www.youtube.com/watch?v=VY96Ge5kK34
On n'a trouvé une paramétrisation de courbe mais on ne reconnait pas de courbe célèbre. Pour cela, il faut trouver la bonne paramétrisation. La bonne paramétisation, c'est la paramétisation par 2α ! Pourquoi, ben parce que c'est comme ça. On n'y va, on repart de :

$$\alpha(s) = \arcsin(s) \qquad \text{dont on tire} \qquad s = \sin(\alpha)$$

On remplace tout cela dans $y(s)$ et $x(s)$, on obtient :

$$y(\alpha) = \frac{1}{2}\sin^2\alpha = \frac{1}{4}\Big(1-\cos(2\alpha)\Big)$$

et

$$x(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{4}\Big(\sin(2\alpha) + 2\alpha\Big)$$

On retrouve un arc de cycloïde.

Exercice 5

1. Calculer une paramétrisation de la développée d'une chainette (i.e. $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$).
2. Calculer une paramétrisation de la développante d'une chainette à partir de $t = 0$. *La courbe obtenue s'appelle la tractrice.*
3. Montrer qu'une cycloïde, sa développée et une de ses développantes diffèrent entre elles d'une translation. *Indication, avec les notations du cours, montrer que l'on a :*
$$|f'(t)| = 2\sin(t/2) \qquad T(t) = e^{i(\pi-t)/2} \qquad \beta(t) = \frac{\pi - t}{2} \qquad N(t) = iT(t) = -e^{-it/2}$$
$$R(t) = -4\sin(t/2) \qquad \omega(t) = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ -1 + \cos t \end{pmatrix}$$
4. Montrer qu'une astroïde et sa développée (lieu des centres de courbures) diffèrent d'une similitude. *Indication, faire les calculs en complexe ! ! ! On prend la paramétrisation de l'astroïde par :* $t \mapsto 3e^{it} + e^{-3it}$. *Avec les notations du cours, montrer que l'on a :*
$$|f'(t)| = 6\sin(2t) \qquad T(t) = -e^{-it} \qquad N(t) = -ie^{-it} \qquad \beta(t) = \pi - t$$
$$R(t) = -6\sin(2t) \qquad \omega(t) = 6e^{it} - 2e^{-3it} \qquad 2e^{i\pi/4} f(t - \pi/4) = \omega(t)$$
Défi : faire les calculs sans les nombres complexes... ;-)

---

1. Pour la chainette on a :
$$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix} \qquad f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} \qquad f''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh t \end{pmatrix}$$
On a donc :
$$|f'(t)| = \sqrt{1^2 + \sinh^2 t} = \cosh t \qquad T(t) = \frac{1}{\cosh t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} \qquad N(t) = \frac{1}{\cosh t}\begin{pmatrix} -\sinh t \\ 1 \end{pmatrix}$$
et
$$\kappa(t) = \frac{[f', f'']}{|f'|^3} = \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \frac{1}{\cosh^2 t} \qquad R(t) = \cosh^2 t$$
Ainsi, on obtient la paramétrisation de la développé ω :
$$\omega(t) = f(t) + R(t)N(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix} + \cosh^2 t \times \frac{1}{\cosh t}\begin{pmatrix} -\sinh t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sinh t \cosh t \\ 2\cosh t \end{pmatrix}$$
Pour réaliser, le tracé, il suffit d'étudier la fonction $t \mapsto t - \sinh t \cosh t$ qui est une bijection $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ décroissante.
2. La paramétrisation δ de la développante est donnée par :
$$\delta(t) = f(t) - \ell(t)T(t), \qquad \text{où } \ell(t) \text{ est la longueur de la courbe entre } t = 0 \text{ et } t$$
On a donc :
$$\ell(t) = \int_0^t |f'(t)|dt = \int_0^t \cosh t dt = \sinh t$$
On a donc :
$$\delta(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix} - \sinh t \times \frac{1}{\cosh t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \tanh t \\ \cosh t - \frac{\sinh^2 t}{\cosh t} \end{pmatrix}$$
Mais :
$$\cosh t - \frac{\sinh^2 t}{\cosh t} = \frac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{\cosh t} = \frac{1}{\cosh t}$$
D'où finalement,
$$\delta(t) = \begin{pmatrix} t - \tanh t \\ \frac{1}{\cosh t} \end{pmatrix}$$
Cette courbe s'appelle la tractrice.

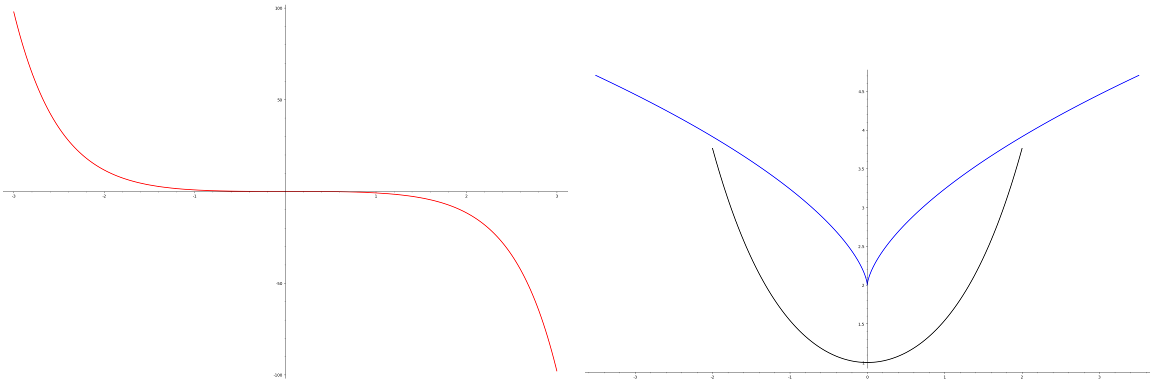

Figure 11 – Graphe de $t \mapsto t - \sinh t \cosh t$ (en rouge) et la chainette (noir) avec sa développée (bleu)

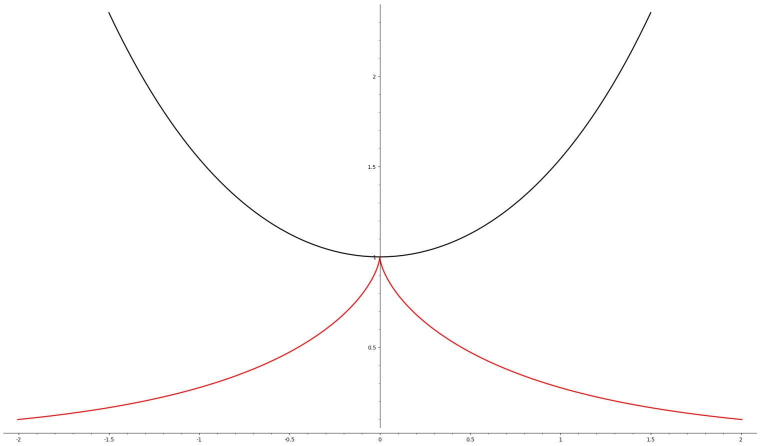

Figure 12 – La chainette (noir) et sa développante en $t = 0$: la tractrice (rouge)

3. On a :

$$f(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \qquad f'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin^2(t/2) \\ 2\sin(t/2)\cos(t/2) \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$f'(t) = 2\sin(t/2)\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix} = 2\sin(t/2) \times \Big(\sin(t/2) + i\cos(t/2)\Big)$$

On va passer en complexe, ca simplifie les calculs :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\sin(t/2) \times \Big(\sin(t/2) + i\cos(t/2)\Big) \\ &= \mathbf{i} \times 2\sin(t/2) \times \textbf{-i} \times \Big(\sin(t/2) + i\cos(t/2)\Big) \\ &= 2i\sin(t/2) \times \Big(\cos(t/2) - i\sin(t/2)\Big) \\ &= 2i\sin(t/2) \times \Big(\cos(-t/2) + i\sin(-t/2)\Big) \\ &= 2i\sin(t/2) \times \Big(\cos(-t/2) + i\sin(-t/2)\Big) \\ &= 2\sin(t/2) \times ie^{-it/2} \\ &= 2\sin(t/2) \times e^{i(\pi-t)/2} \end{aligned}$$

On fait l'étude sur $[0, 2\pi]$ pour avoir $\sin(t/2) \geqslant 0$. On obtient ainsi :

$$|f'(t)| = 2\sin(t/2) \qquad T(t) = e^{i(\pi-t)/2} \qquad \beta(t) = \frac{\pi - t}{2} \qquad N(t) = iT(t) = -e^{-it/2}$$

On utilise les formules équivalentes :

$$\beta'(t) = \kappa(t)|f'(t)| \qquad R(t) = \frac{|f'(t)|}{\beta'(t)}$$

On obtient ainsi, le rayon de courbure :

$$R(t) = -4\sin({}^{t}\!/\!{}_{2})$$

On peut à présent se lancer dans le calcul de la développée ω.

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= f(t) + R(t)N(t) \\
&= \begin{pmatrix} t - \sin\, t \\ 1 - \cos\, t \end{pmatrix} + \Big(-4\sin({}^{t}\!/\!{}_{2}) \Big) \times \begin{pmatrix} -\cos({}^{t}\!/\!{}_{2}) \\ \sin({}^{t}\!/\!{}_{2}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t - \sin\, t \\ 1 - \cos\, t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sin({}^{t}\!/\!{}_{2})\cos({}^{t}\!/\!{}_{2}) \\ -4\sin({}^{t}\!/\!{}_{2})\sin({}^{t}\!/\!{}_{2}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t - \sin\, t \\ 1 - \cos\, t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin\, t \\ -2(1 - \cos\, t) \end{pmatrix} \\
\omega(t) &= \begin{pmatrix} t + \sin\, t \\ -1 + \cos\, t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Il faut à présent reconnaitre la cycloïde. En effet, la paramétrisation que l'on a obtenu est décalé dans le temps et la courbe est décalée d'une translation.

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= \begin{pmatrix} t + \sin\, t \\ -1 + \cos\, t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Big(t + \pi\Big) - \sin\, \Big(t + \pi\Big) - \pi \\ 1 - \cos\, \Big(t + \pi\Big) - 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Big(t + \pi\Big) - \sin\, \Big(t + \pi\Big) \\ 1 - \cos\, \Big(t + \pi\Big) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi \\ -2 \end{pmatrix} \\
\omega(t) &= f(t + \pi) + \begin{pmatrix} \pi \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La développée de la cycloïde est donc une cycloïde translaté de $(\pi, -2)$ et décalé dans le temps de π.

Remarque : On a fait les calculs en supposant $t \in [0, 2\pi]$ mais les résultats trouvés sont 2π-périodique donc les résultats sont valides pour $t \in \mathbb{R}$.
Les courbes coincident lorsque la courbe bleue est sur un sommet de la cycloïde. Par conséquent, la développante de la cycloïde par rapport à un de ses sommets d'arche est une autre cycloïde.

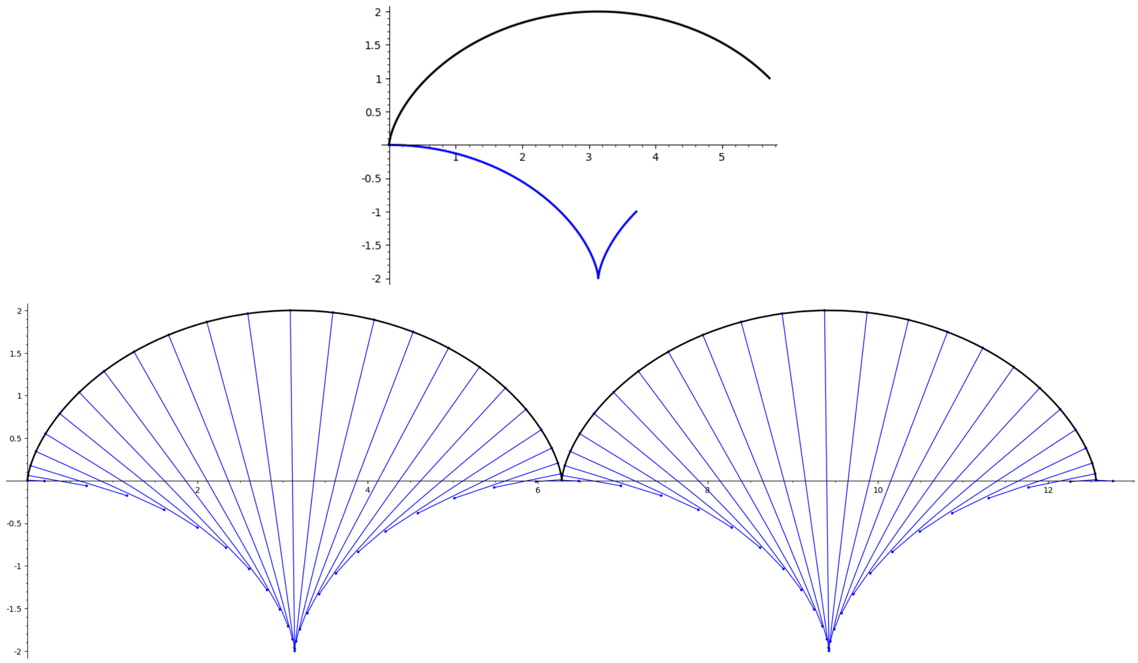

FIGURE 13 – La cycloïde (noir) et sa développée (bleu). Les segments bleus de la deuxième figure sont les segments $[f(t), \omega(t)]$, ils sont normaux à f et tangents à ω.

4. On a :
$$f(t) = 3e^{it} + e^{-3it}$$
On calcule f' en prenant son temps :
$$\begin{aligned}
f'(t) &= 3ie^{it} - 3ie^{-3it} \\
&= 3i\Big(e^{it} - e^{-3it}\Big) \\
&e^{i\alpha} \pm e^{i\beta} \text{ se factorise par } e^{i(\alpha+\beta)/2} \\
&= 3i\Big(e^{it} - e^{-3it}\Big) \\
&= 3ie^{-it}\Big(e^{2it} - e^{-2it}\Big) \\
&= 3ie^{-it}\left(\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i}\right) \times 2i \\
&= -6\sin(2t)e^{-it} \\
f'(t) &= 6\sin(2t)e^{i(\pi-t)}
\end{aligned}$$

On fait l'étude sur $[0, \pi/2]$ pour avoir $\sin(2t) \geqslant 0$. On a donc obtenu :
$$|f'(t)| = 6\sin(2t) \qquad T(t) = e^{i(\pi-t)} = -e^{-it} \qquad N(t) = iT(t) = -ie^{-it} \qquad \beta(t) = \pi - t$$
On utilise les formules équivalentes :
$$\beta'(t) = \kappa(t)|f'(t)| \qquad R(t) = \frac{|f'(t)|}{\beta'(t)}$$
On obtient ainsi, le rayon de courbure :
$$R(t) = -6\sin(2t)$$
On peut à présent se lancer dans le calcul de la développée ω.
$$\begin{aligned}
\omega(t) &= f(t) + R(t)N(t) \\
&= 3e^{it} + e^{-3it} - 6\sin(2t) \times i \times -e^{-it} \\
&\text{Plutôt que de mouliner en arrière pour mettre } 6\sin(2t) \times i \times -e^{-it} \\
&\text{ en somme d'exponentiel, on peut utiliser le calcul de } f'. \\
&= 3e^{it} + e^{-3it} - i\underbrace{\Big(-6\sin(2t)e^{-it}\Big)}_{f'(t)} \\
&= 3e^{it} + e^{-3it} - i\Big(3i\Big(e^{it} - e^{-3it}\Big)\Big) \\
&= 3e^{it} + e^{-3it} + 3e^{it} - 3e^{-3it} \\
\omega(t) &= 6e^{it} - 2e^{-3it}
\end{aligned}$$

Il nous reste à reconnaître une astroïde, comme pour la cycloïde, il y a un décalage dans le temps et une similitude à appliquer. Pour trouver le décalage, les courageux tracerons la développée, les sioux observeront que les points de l'astroïde où le rayon de courbure est maximal correspondent aux temps $t = \pi/4$ modulo $\pi/2$, les points où la courbure est maximale coorespondent aux points de rebroussement de la développée, on peut donc induiter la figure suivante : On cherche donc à montrer que :
$$\omega(t) = 2e^{i\pi/4} f(t - \pi/4)$$

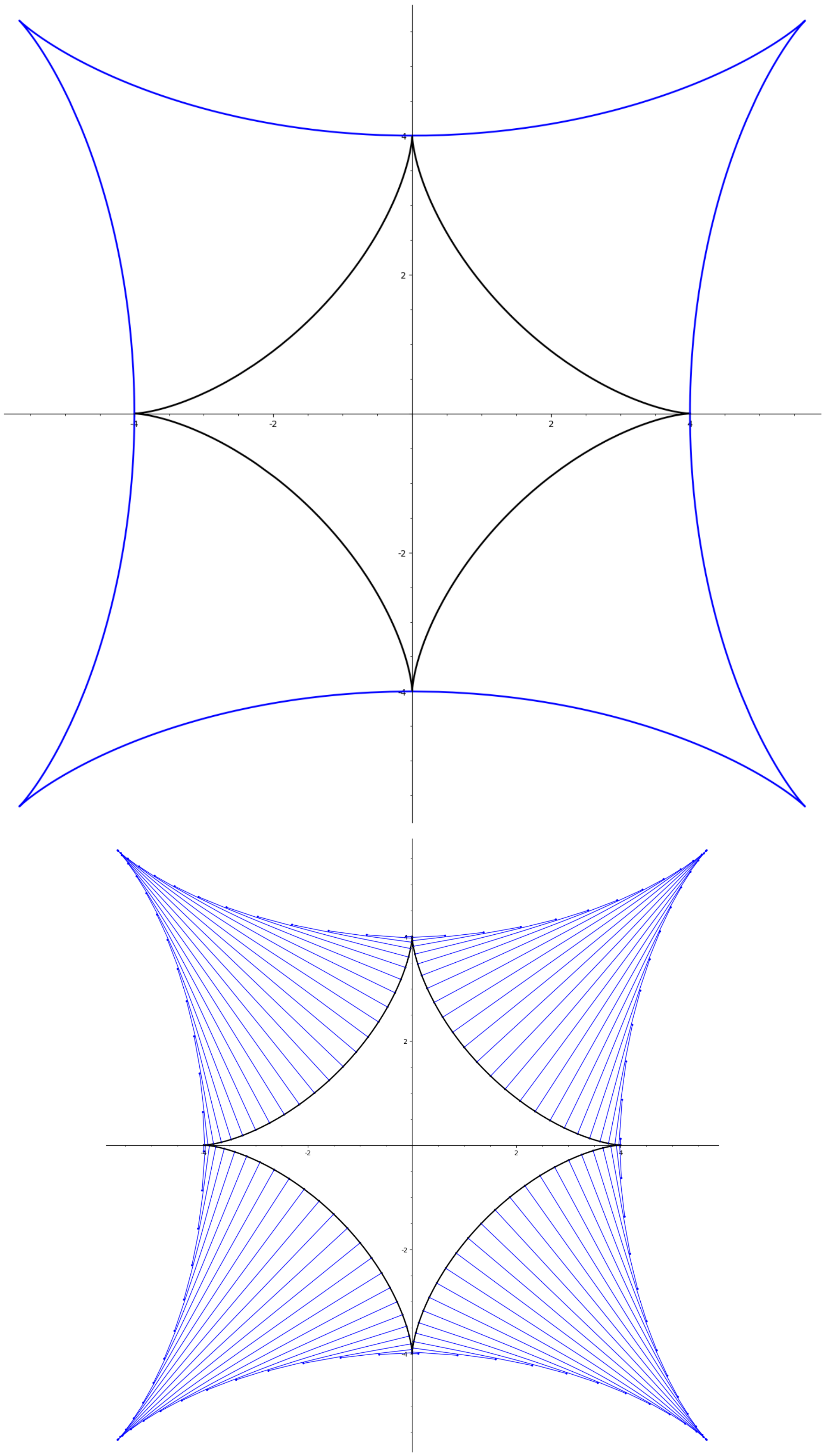

Figure 14 – L'astroïde (noir) et sa développée (bleu). Les segments bleus de la deuxième figure sont les segments $[f(t), \omega(t)]$, ils sont normaux à f et tangents à ω.

On se lance :

$$
\begin{aligned}
2e^{i\pi/4} f(t - {}^{\pi}/_{4}) &= 2 \times e^{i\pi/4} \times \left(3e^{i(t-{}^{\pi}/_{4})} + e^{-3i(t-{}^{\pi}/_{4})}\right) \\
&= 2 \times e^{i\pi/4} \times \left(3e^{it} e^{-i\pi/4} + e^{-3it} e^{i3\pi/4}\right) \\
&= 2 \times \left(3e^{it} + e^{-3it} e^{i\pi}\right) \\
&= 2 \times \left(3e^{it} - e^{-3it}\right) \\
2e^{i\pi/4} f(t - {}^{\pi}/_{4}) &= \omega(t)
\end{aligned}
$$

La développée d'une astroïde est donc l'image de l'astroïde de départ par une similitude directe de centre le centre de l'astroïde, de rapport 2 et d'angle ${}^{\pi}/_{4}$ et le temps est décalé de ${}^{\pi}/_{4}$.