Courbes et Surfaces Paramétrées

TD n°2 : Etude métrique des courbes

1 La longueur d'une courbe

Exercice 1

Calculer les longueurs des courbes suivantes :

1. une arche de cycloïde : $x = t - \sin(t)$, $y = 1 - \cos(t)$, voir figure 1.
2. une cardioïde : $\rho = 1 + \cos(\theta)$, voir figure 2.
3. un astroïde : $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$, voir figure 3.
4. un tour de spirale d'archimède : $\rho = \theta$, voir figure 4.
5. l'arc de $x = 1$ à $x = T$ de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.
6. de la néphroïde : $t \mapsto \Big(3\cos(t) - \cos(3t), 3\sin(t) - \sin(3t)\Big)$, voir figure 5.

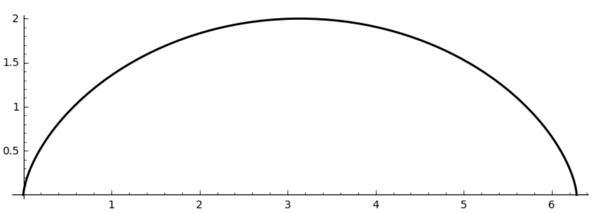


Fig. 1

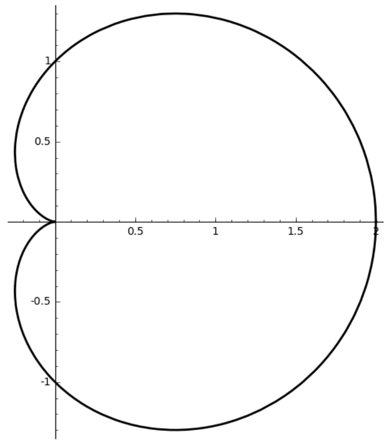


Fig. 2

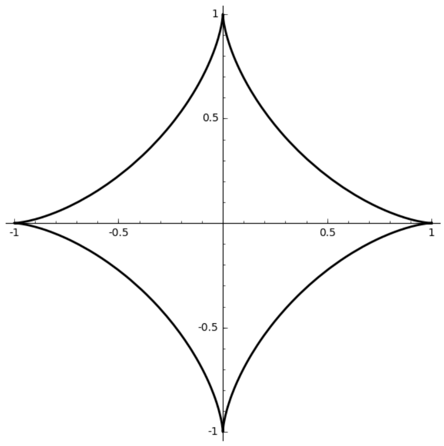


Fig. 3

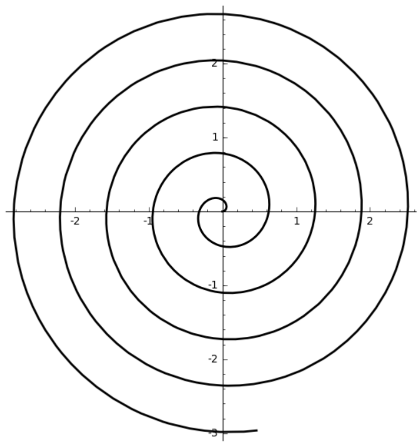


Fig. 4

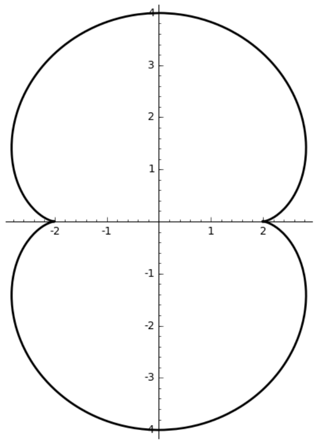


Fig. 5.

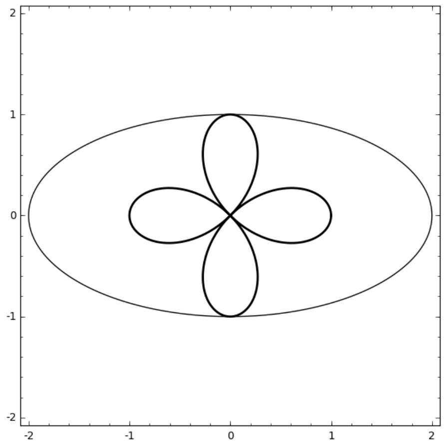


Fig. 6.

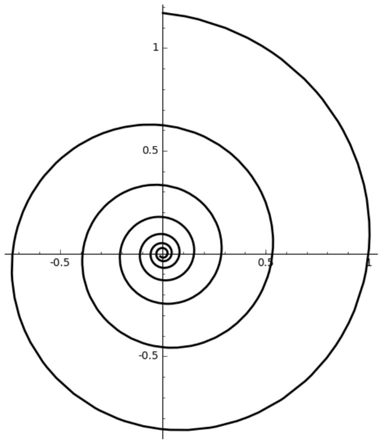


Fig.7

Exercice 2

Montrer que les longueurs des deux courbes suivantes (voir Fig. 6.) sont égales :

- L'ellipse d'équation implicite $x^2 + 4y^2 = 4$
- Le trèfle à 4 feuilles de paramétrisation en polaire $\rho = \cos(2\theta)$.

2 La courbure

Exercice 3

Calculer la courbure des courbes suivantes :

- $\theta \mapsto \rho(\theta) = \theta^\alpha$, pour $\alpha > 0$, définie pour $\theta > 0$.
- La cycloïde.
- La cardioïde $\rho = 1 + \cos(\theta)$

Exercice 4

On considère la courbe f donnée par $t \mapsto (t, \ln(t))$.

1. Déterminer l'ensemble de départ de f.
2. Calculer le rayon R de courbure f en tout point.
3. Etudier et calculer les extrema de $t \mapsto |R(t)|$.

Exercice 5

On considère l'hyperbole équilatère donnée par la paramétrisation $t \mapsto (\cosh(t), \sinh(t))$.

1. Tracer la courbe.
2. Calculer le rayon de courbure au point de paramètre t.
3. On note $g(t)$ le second point d'intersection de la normale à la courbe f en $f(t)$. Faire un dessin.
4. Montrer que $|f(t) - g(t)| = 2|R(t)|$.

Exercice 6

On considère la courbe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{u^2}{2}\right) du \qquad y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{u^2}{2}\right) du$$

1. Montrer que f est paramétré par l'abscisse curviligne.
2. En déduire la longueur d'arc de la courbe f entre le point de paramètre 0 et le point de paramètre t.
3. Calculer la courbure de f au point de paramètre t.
4. Montrer que x et y convergent lorsque t tend vers l'infini.
5. Déduire des deux derniers points un tracé grossier de f. *On pourra en plus calculer $f'(0)$.*

Exercice 7

Les 4 courbes dessinées dans la Figure 4-courbes sont parcourues dans le sens trigonométrique en partant du point indiqué $t = 0$. Colorier en rouge les zones où la courbure est positive, en vert les zones où la courbure est négative. Lesquelles sont birégulières ? Dessiner grossièrement l'allure de la fonction $\beta : I \to \mathbb{R}$, où I est l'intervalle de définition de la courbe, β est l'unique relevé de l'angle orienté $(Ox, \vec{T}) \in \mathbb{S}^1$ qui vérifie $\beta(0) = 0$, en particulier déterminer $\beta(I)$.

Exercice 8

Calculer un relevé $t \mapsto \beta(t)$ de l'angle $(Ox, \vec{T})$ pour les courbes suivantes :

1. $t \mapsto (t, e^t)$
2. $t \mapsto (t, t^3)$
3. $t \mapsto (t\cos t, t\sin t)$
4. $\theta \mapsto 1 + \cos\theta$

Vérifier que l'obtient bien des difféomorphismes (en dehors éventuellement d'un nb fini de points que l'on précisera) comme prévu.

Exercice 9

On considère la courbe donnée par $g(x) = \ln(\cos x)$, pour $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Calculer le rayon de courbure $R(t)$. Calculer l'abscisse curviligne $s(t)$ en prenant $x = 0$ comme point de départ. Tracer la courbe et sa développée.

3 Développée et développante

Exercice 10

Soit $k > 0$. On considère la spirale logarithmique, voir figure 7, donnée en coordonnées polaires par $\rho = e^{k\theta}$, autrement dit on étudie la courbe $\theta \mapsto z(\theta) = e^{(k+i)\theta}$.
L'utilisation des nombres complexes simplifie grandement les calculs.

1. Calculer le repère de Frenet, $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$.
2. En déduire les angles $\beta = (Ox, \overrightarrow{T})$ et $(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{T})$. Interpréter.
3. Calculer la courbure au point de paramètre θ.
4. En déduire une paramétrisation de la développée (lieu des centres de courbures) de la spirale logarithmique. Reconnaitre la courbe obtenue.

Exercice 11

Si γ une courbe birégulière de classe $\mathcal{C}^2$, alors on note s son abscisse curviligne et R son rayon de courbure. Trouver toutes les courbes qui vérifient l'équation intrinsèque :

1. $R = 1 + s^2$.
2. $R = \sqrt{1 - s^2}$.

Indication : Commencer par calculer explicitement $s \mapsto \alpha(s)$, en déduire $s \mapsto (x'(s), y'(s))$, intégrer pour obtenir $s \mapsto (x(s), y(s))$. Enfin, chercher à reparamétriser, si besoin, pour reconnaître une courbe classique.

Exercice 12

1. Calculer une paramétrisation de la développée d'une chainette (i.e. $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$).
2. Calculer une paramétrisation de la développante d'une chainette à partir de $t = 0$. *La courbe obtenue s'appelle la tractrice.*
3. Montrer qu'une cycloïde, sa développée et une de ses développantes diffèrent entre elles d'une translation.
   Indication, avec les notations du cours, montrer que l'on a :

$$|f'(t)| = 2\sin(t/2) \qquad T(t) = e^{i(\pi-t)/2} \qquad \beta(t) = \frac{\pi - t}{2} \qquad N(t) = iT(t) = -e^{-it/2}$$

$$R(t) = -4\sin(t/2) \qquad \omega(t) = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ -1 + \cos t \end{pmatrix}$$

4. Montrer qu'une astroïde et sa développée (lieu des centres de courbures) diffèrent d'une similitude.
   Indication, faire les calculs en complexe ! ! ! On prend la paramétrisation de l'astroïde par : $t \mapsto 3e^{it} + e^{-3it}$.
   Avec les notations du cours, montrer que l'on a :

$$|f'(t)| = 6\sin(2t) \qquad T(t) = -e^{-it} \qquad N(t) = -ie^{-it} \qquad \beta(t) = \pi - t$$

$$R(t) = -6\sin(2t) \qquad \omega(t) = 6e^{it} - 2e^{-3it} \qquad 2e^{i\pi/4} f(t - \pi/4) = \omega(t)$$

   Défi : faire les calculs sans les nombres complexes... ;-)

4 Pour aller plus loin

Exercice 13

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple de longueur L de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée par la longueur d'arc. On suppose que γ tourne autour d'un point intérieur dans le sens trigonométrique (Cf le théorème de Jordan). On dit que γ est convexe si pour tout points p, q dans l'image de γ, le segment ouvert $]p, q[$ est dans l'intérieur de γ.

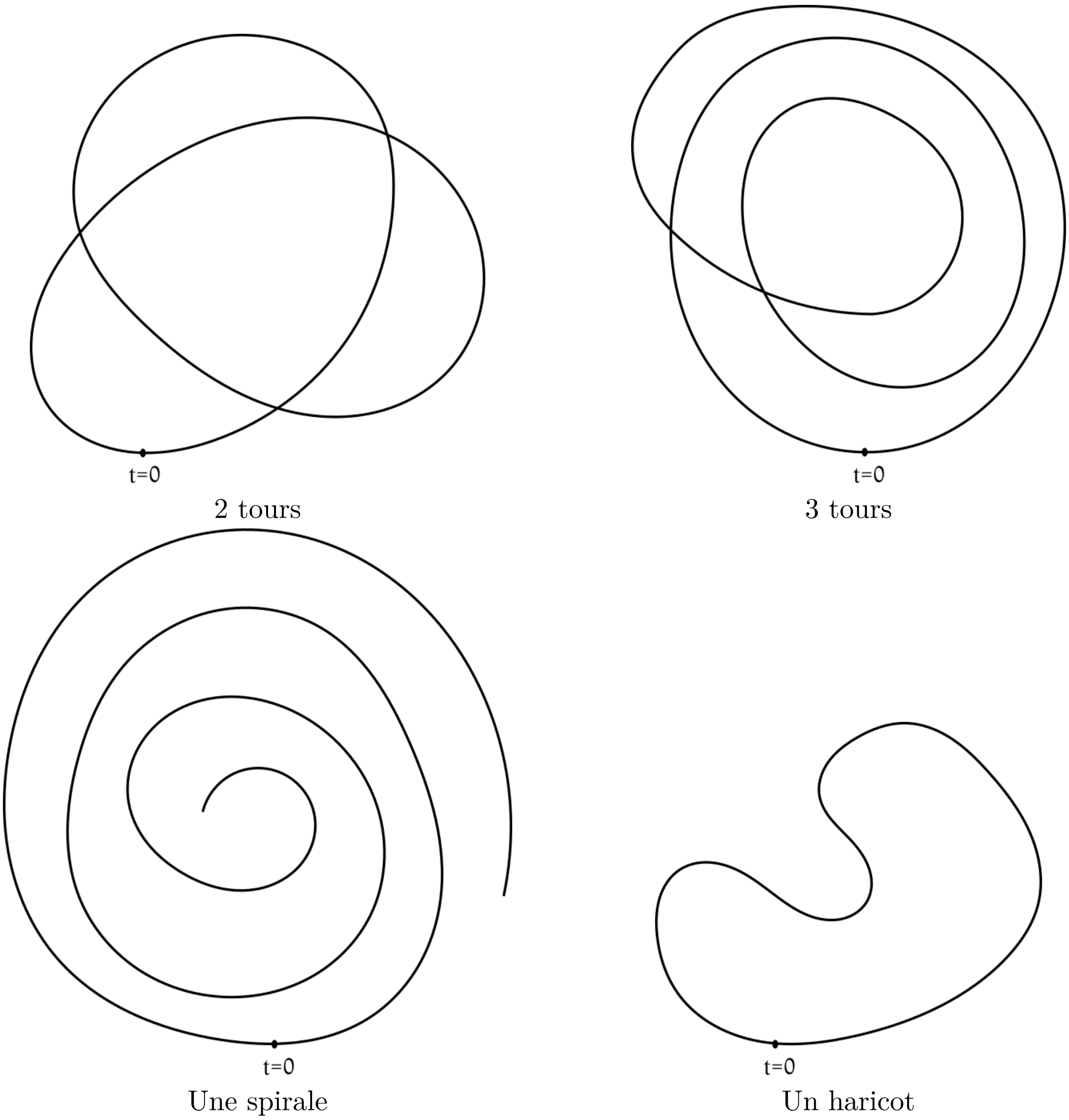
1. Montrer que si la courbure de γ change de signe en x_0 alors le point x_0 est un point d'inflexion de γ.
2. Montrer qu'une courbe convexe n'admet pas de points d'inflexion.
3. En déduire que si γ est convexe alors la courbure de γ est positive ou nulle.
4. Réciproquement, montrer que si la courbure de γ est positive ou nulle alors γ est convexe.
5. Montrer que $\displaystyle\int_0^L \kappa(s)ds = 2\pi$ (sans hypothèse de convexité sur γ).

   Ind : Utiliser l'angle $\alpha = (Ox, \overrightarrow{T})$.

   Sans supposer γ convexe, on appelle *courbure totale* la quantité $\displaystyle\int_0^L |\kappa(s)|ds \geqslant 2\pi$, de γ.
6. En déduire l'inégalité suivante et son cas d'égalité :

$$\int_0^L |\kappa(s)|ds \geqslant 2\pi$$

   avec égalité si et seulement si γ est convexe.



2 tours
3 tours
Une spirale
Un haricot

FIGURE 1 – 4 courbes