



Courbes et Surfaces Paramétrées

*TD n°1 : Courbe plane en coordonnées
cartésiennes et polaires*



1 Étude de courbes en coordonnées cartésiennes

Exercice 1

Étudier les courbes paramétrées suivantes :

$$1. \begin{cases} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{cases}$$

Courbe de Lissajous ($p = 2, q = 3$)

$$2. \begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = \cos(t) \end{cases}$$

Cycloïde

$$3. \begin{cases} x = \cos(t) + \cos(3t) \\ y = \sin(t) + \sin(3t) \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ y = \frac{t^3 - t}{t^2 + 1} \end{cases}$$

Trisectrice de Maclaurin

$$5. \begin{cases} x = \frac{t}{1 + t^3} \\ y = \frac{t^2}{1 + t^3} \end{cases}$$

Folium de Descartes

$$6. \begin{cases} x = t \ln(t) \\ y = \ln(t)/t \end{cases}$$

Chercher les points d'inflexions

$$7. \begin{cases} x = te^t \\ y = e^t/t \end{cases}$$

Chercher les points d'inflexions

$$8. \begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 2t^2 - t^4 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x = \sin(t) \\ y = \tan(t)(1 - \sin(t)) \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \cos(t/3) + \sin(t/3) \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = \int_0^t \cos(u^2) du \\ y = \int_0^t \sin(u^2) du \end{cases}$$

Clothoïde ou Spirale de Cornu

Exercice 2

Montrer que la courbe définie par $\begin{cases} x = 3t^3 + 2t^2 - t - 1 \\ y = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$ admet un unique point double. Déterminer ce point, ainsi que les tangentes correspondantes. Tracer la courbe.

Recommencer avec la courbe définie par $\begin{cases} x = t^2 + t^3 \\ y = t^4 + t^5 \end{cases}$

2 Étude de courbes en coordonnées polaires

Exercice 3

Étudier les courbes en polaire suivantes :

1. $\rho = 1$
2. $\rho = \sin(\theta)$
3. $\rho = \sin(2\theta)$
4. $\rho = \sin(n\theta)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ en distinguant les cas n pair et n impair.
5. $\rho = 1 + \cos(\theta)$
Cardioïde
6. $\rho = 1/2 + \cos(\theta)$
Limaçon de Pascal
7. $\rho = a + \cos(\theta)$ avec $1 < a < 2$.
Limaçon de Pascal
8. $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$
Lemniscate de Bernoulli

Exercice 4

Étudier les courbes en polaire suivantes :

1. $\rho = \frac{\sin(3\theta)}{\sin \theta}$
2. $\rho = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \cos \theta}$
3. $\rho = \frac{\theta}{\theta - \pi}$
4. $\rho = 1 + \cos(4\theta) + \sin(4\theta)^2$
5. $\rho = \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{\cos(\theta)^3 + \sin(\theta)^3}$
On pourra chercher à retrouver le folium de Descartes

Exercice 5

Étudier les courbes en polaire suivantes, définies pour $\theta > 0$:

1. $\rho = \theta$
2. $\rho = \sqrt{\theta}$
3. $\rho = 2^\theta$

3 Pour s'entraîner

Exercice 6

(Les Épicycloïdes) Soit \mathcal{U} un cercle fixe de rayon 1, et n un entier non nul. Soit C un cercle de rayon $\frac{1}{n}$ qui roule sans glisser à l'**extérieur** de \mathcal{U} .

1. Déterminer une représentation paramétrique de la courbe décrite par un point de C .

$$\text{Ind : } t \mapsto \frac{1}{n} \left((n+1)e^{it} - e^{i(n+1)t} \right)$$

2. Étudier et tracer le cas $n = 1$ (cardioïde).
3. Étudier et tracer le cas $n = 2$ (néphroïde).

Exercice 7

(Les Hypocycloïdes) Soit \mathcal{U} un cercle fixe de rayon 1, et n un entier non nul. Soit C un cercle de rayon $\frac{1}{n}$ qui roule sans glisser à l'**intérieur** de \mathcal{U} .

1. Déterminer une représentation paramétrique de la courbe décrite par un point de C .

$$\text{Ind : } t \mapsto \frac{1}{n} \left((n-1)e^{it} - e^{i(n-1)t} \right)$$

2. Étudier et tracer le cas $n = 2$.
3. Étudier et tracer le cas $n = 3$ (deltoïde).
4. Étudier et tracer le cas $n = 4$ (astroïde). Déterminer une propriété remarquable des tangentes à l'astroïde.