Courbes et Surfaces Paramétrées

CC n°2 : Jeudi 2 avril
Durée : Une heure

L'usage d'internet est interdit. Les notes de cours et de TD sont autorisées. La clarté, le soin et la concision font partie de la notation.

Questions de Cours

6pts

1. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée par l'abscisse curviligne. Rappeler le sens de cette phrase. Donner la définition de la *courbure* de γ au point de paramètre s. 2pts

2. Tracer 3 courbes (disjointes) sur votre feuille. Mettre en rouge les zones, où la courbe tourne à gauche, en vert les zones où la courbe tourne à droite. *Plus les courbes sont compliquées, plus je mets des points. Plus il y a de courbes fermées, plus je mets des points.* 2pts

3. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes : 2pts

i. La courbe $t \mapsto (t, g(t))$ tourne à gauche sur I.

ii. La dérivée seconde de g est positive.

Quel est le nom d'une telle fonction g ?

La courbure de la courbe $t \mapsto (t, g(t))$ au point de paramètre t est donnée par :

$$\kappa(t) = \frac{g''(t)}{\sqrt{1 + g'(t)^2}^3}$$

Or, la courbe tourne à gauche sur I si et seulement si $\kappa(t) \geqslant 0$ sur I. D'où le résultat. Une telle fonction est dite convexe.

Exercice 1

7pts

On considère la courbe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par :

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{2} \\ \\ \dfrac{t^3}{3} \end{pmatrix}$$

1. Étude de la courbe paramétrée par f : 3pts

a. Trouver les symétries de la courbe, en déduire un intervalle d'étude.

b. Donner le tableau de variation de x et y sur cet intervalle (il n'est pas nécessaire de dériver).

c. Calculer et placer la tangente au point de paramètre $t = 0$. Quel nom donne-t-on à un tel point ?

d. Étudier la branche infinie de f.

e. Tracer la courbe.

---

1. a. La courbe vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x(-t) = x(t) \qquad \text{et} \qquad y(-t) = -y(t)$$

La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on étudie sur $[0, +\infty[$.

b. Sur $[0, +\infty[$, les fonctions x et y sont croissantes.

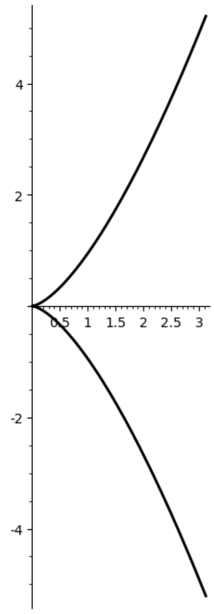

Figure 1 – Le tracé de la courbe $({t^2}/{2}, {t^3}/{3})$.

c.

$$\text{On a :} \qquad f'(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et donc} \qquad f'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La première dérivée étant nulle en zéro, on calcule la dérivée seconde de f :

$$f''(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \qquad \text{on obtient :} \qquad f''(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

La tangente en zéro à la courbe f est donc dirigée par le vecteur $f''(0)$. La dérivée troisième de f en 0 n'est pas colinéaire à la dérivée seconde en 0, on a donc un point de rebroussement de 1ère espèce.

d. Les limites de x, y et ${y}/{x}$ en $+\infty$ sont $+\infty$. La branche infinie de f en $+\infty$ est donc une branche parabolique d'axe (Oy).

e. Le tracé :

---

2. Calcul de la longueur d'un arc de la courbe paramétrée par f : 1.5 pt

   a. Rappeler le théorème et la formule permettant de calculer la longueur ℓ_T de la courbe f joignant le point de paramètre 0 au point de paramètre T.

   b. Montrer que : 1.5 pt

$$\ell_T = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \int_0^T (2t) \times \sqrt{1+t^2}\, dt$$

   c. Montrer que : 1 pt

$$\ell_T = \frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{1+T^2}\right)^3 - 1\right)$$

---

2. **a.** Cours.

   b. Soit $t \geqslant 0$. On a :

$$f'(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad \text{on en déduit que :} \qquad |f'(t)| = \sqrt{t^2+t^4} = t\sqrt{1+t^2}$$

   On a :

$$\ell_T = \int_0^T |f'(t)| dt = \int_0^T t\sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \int_0^T (2t) \times \sqrt{1+t^2}\, dt$$

   c. On reconnait une forme en $u'u^{1/2}$. On en déduit que :

$$\ell_T = \frac{1}{3}\left(\left(1+T^2\right)^{3/2} - 1\right)$$

Exercice 2 **7pts**

On considère la courbe $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ donnée en coordonnées complexes par :

$$f(t) = (1-it)e^{it}$$

1. Montrer que : 1 pt

$$f'(t) = te^{it}$$

2. En déduire que, la longueur ℓ_T de l'arc joignant le point de paramètre 0 au point de paramètre T est donnée par : 1.5 pt

$$\ell_T = \frac{T^2}{2}$$

3. Déduire du premier point une formule simple pour le relevé β de l'angle (Ox, T) vérifiant $\beta(0) = 0$. 1.5 pt

4. Montrer que le rayon de courbure $R(t)$ de la courbe f au point de paramètre t vérifie : 2 pts

$$R(t) = t$$

5. Montrer que si $\gamma : [0, +\infty[\ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ est la paramétrisation par l'abscisse curviligne de la courbe f alors on a : 1 pt

$$R_\gamma^2(s) = 2s$$

où $R_\gamma(s)$ désigne cette fois le rayon de courbure à la courbe γ au point de paramètre s.

---

1. On a :

$$f'(t) = -i \times e^{it} + (1-it) \times ie^{it} = (-i+i+t)e^{it} = te^{it}$$

2. On en déduit que :

$$|f'(t)| = t \qquad \textit{rappel : } t \geqslant 0$$

On a donc :

$$\ell_T = \int_0^T |f'(t)|dt = \int_0^T tdt = \frac{T^2}{2}$$

3. La fonction continue $\beta(t) = t$ vérifie, pour tout $t \geqslant 0$:

$$f'(t) = |f'(t)|\, e^{i\beta(t)} \qquad \text{et} \qquad \beta(0) = 0.$$

Par unicité du relévé **continue** de l'angle (Ox, T) vérifiant $\beta(0) = 0$, la fonction $\beta(t) = t$ est bien le relevé de l'angle (Ox, T).

4. La courbure et le relevé de l'angle sont reliés par la formule :

$$\beta'(t) = \kappa(t)|f'(t)|$$

On en déduit donc que :

$$R(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = \frac{|f'(t)|}{\beta'(t)} = \frac{t}{1} = t$$

5. La question 2. montre que $\ell_T = \frac{T^2}{2}$, on en déduit donc que :

$$s = \frac{t^2}{2} \qquad \text{ou encore} \quad t = \sqrt{2s}$$

Ainsi, le rayon de courbure $\mathbb{R}_\gamma(s)$ de la courbe γ au point de paramètre s est le rayon de courbure $R(t)$ de la courbe f au point de paramètre $t = \sqrt{2s}$, d'où :

$$R_\gamma(s) = R(\sqrt{2s}) = \sqrt{2s}$$

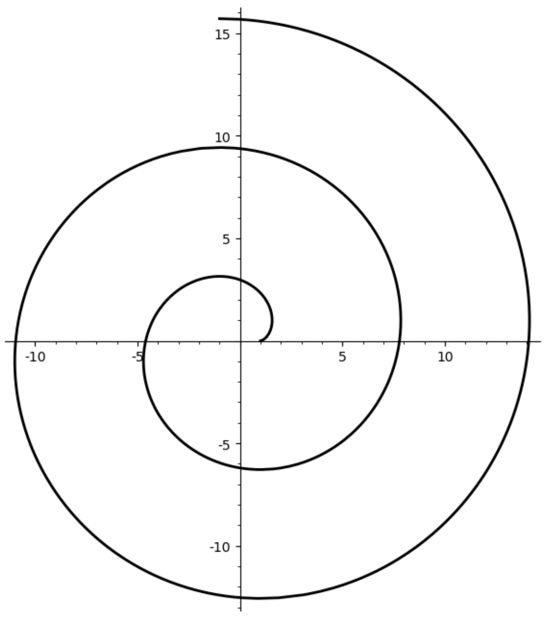

Figure 2 – Le tracé de la courbe $t \mapsto (1 - it)e^{it}$.