Courbes et Surfaces Paramétrées

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

CC n°2 : Jeudi 2 avril
Durée : Une heure

Les recherches et les communications extérieures au tchat Discord sont interdites. Les notes de cours et de TD sont autorisées. La clarté, le soin et la concision font partie de la notation.

Le barême est à titre indicatif, il pourra évoluer voir être révolutionné pendant la correction.

Questions de Cours **6pts**

1. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée par l'abscisse curviligne. Rappeler le sens de cette phrase. Donner la définition de la *courbure* de γ au point de paramètre s. 2pts
2. Tracer 3 courbes (disjointes) sur votre feuille. Mettre en rouge les zones, où la courbe tourne à gauche, en vert les zones où la courbe tourne à droite. *Plus les courbes sont compliquées, plus je mets des points. Plus il y a de courbes fermées, plus je mets des points.* 2pts
3. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que les phrases suivantes sont équivalentes : 2pts
   i. La courbe $t \mapsto (t, g(t))$ tourne à gauche sur I.
   ii. La dérivée seconde de g est positive.

   Quel est le nom d'une telle fonction g ?

Attention quand l'énoncé demande une définition, on attend la définition de l'objet pas une formule pour le calculer.

Exercice 1 **7pts**

On considère la courbe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par :

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{2} \\ \\ \dfrac{t^3}{3} \end{pmatrix}$$

1. Étude de la courbe paramétrée par f : 3pts
   a. Trouver les symétries de la courbe, en déduire un intervalle d'étude.
   b. Donner le tableau de variation de x et y sur cet intervalle (il n'est pas nécessaire de dériver).
   c. Calculer et placer la tangente au point de paramètre $t = 0$. Quel nom donne-t-on à un tel point ?
   d. Étudier la branche infinie de f.
   e. Tracer la courbe.
2. Calcul de la longueur d'un arc de la courbe paramétrée par f : 1.5 pt
   a. Rappeler le théorème et la formule permettant de calculer la longueur ℓ_T de la courbe f joignant le point de paramètre 0 au point de paramètre T.
   b. Montrer que : 1.5 pt
   $$\ell_T = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \int_0^T (2t) \times \sqrt{1 + t^2}\, dt$$
   c. Montrer que : 1 pt
   $$\ell_T = \frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{1 + T^2}\right)^3 - 1\right)$$

Exercice 2 **7pts**

On considère la courbe $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ donnée en coordonnées complexes par :

$$f(t) = (1 - it)e^{it}$$

1. Montrer que : 1 pt

$$f'(t) = te^{it}$$

1.5 pt

2. En déduire que, la longueur ℓ_T de l'arc joignant le point de paramètre 0 au point de paramètre T est donnée par :

$$\ell_T = \frac{T^2}{2}$$

1.5 pt

3. Déduire du premier point une formule simple pour le relevé β de l'angle (Ox, T) vérifiant $\beta(0) = 0$. 2 pts

4. Montrer que le rayon de courbure $R(t)$ de la courbe f au point de paramètre t vérifie :

$$R(t) = t$$

1 pt

5. Montrer que si $\gamma : [0, +\infty[\ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ est la paramétrisation par l'abscisse curviligne de la courbe f alors on a :

$$R_\gamma^2(s) = 2s$$

où $R_\gamma(s)$ désigne cette fois le rayon de courbure à la courbe γ au point de paramètre s.