Courbes et Surfaces Paramétrées

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

CC n°1 : Mercredi 4 mars
Durée : Une heure

L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdits. La clarté, le soin et la concision font partie de la notation.

Questions de Cours

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe $\mathcal{C}^1$. Donner la définition de *point stationnaire* et de *point birégulier*.
2. Soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On note :

$$u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \qquad v_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

   On considère la courbe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(\theta) = \rho(\theta)u_\theta$. Dériver f, en déduire la direction de la tangente lorsque $\rho'(\theta) = 0$ et lorsque $\rho(\theta) = 0$.
3. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée par l'abscisse curviligne. Rappeler le sens de cette phrase. Donner la définition de la *courbure* de γ au point de paramètre $s \in [a, b]$.

Attention quand l'énoncé demande une définition, on attend la définition de l'objet pas une formule pour le calculer.

Exercice 1

On étudie la courbe $\mathcal{C}$ donnée en coordonnées polaires via la fonction $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\rho(\theta) = \cos(\theta)\cos(2\theta)$$

On pourra utiliser librement les notations du cours :

$$u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \qquad v_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta)) \qquad f(\theta) = \rho(\theta)u_\theta$$

Toute autre notation devra être définie proprement.

1. Montrer que la fonction $\theta \mapsto f(\theta)$ est π-périodique.
2. Trouver un axe de symétrie de la courbe.
3. Étudier la courbe sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   (a) On montrera que $\rho'(\theta) = -\sin(\theta)(6\cos^2(\theta) - 1)$.
   On pose $\theta_0 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \simeq 0.36\pi$.
   (b) Montrer que $\rho(\theta_0) = -\frac{2}{3\sqrt{6}}$. *On acceptera que* $\frac{2}{3\sqrt{6}} \simeq 0.2721$.
   (c) Donner le tableau de variation de ρ.
4. Placer soigneusement les tangentes à la courbe.
5. Tracer la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
6. Tracer la courbe entièrement.