Feuille n^o 2 : Fonctions, applications

Domaine de définition

Exercice 1

Trouver le domaine de définition des fonctions données par les formules suivantes :

1. $\sqrt{x^2 - 3x - 4}$

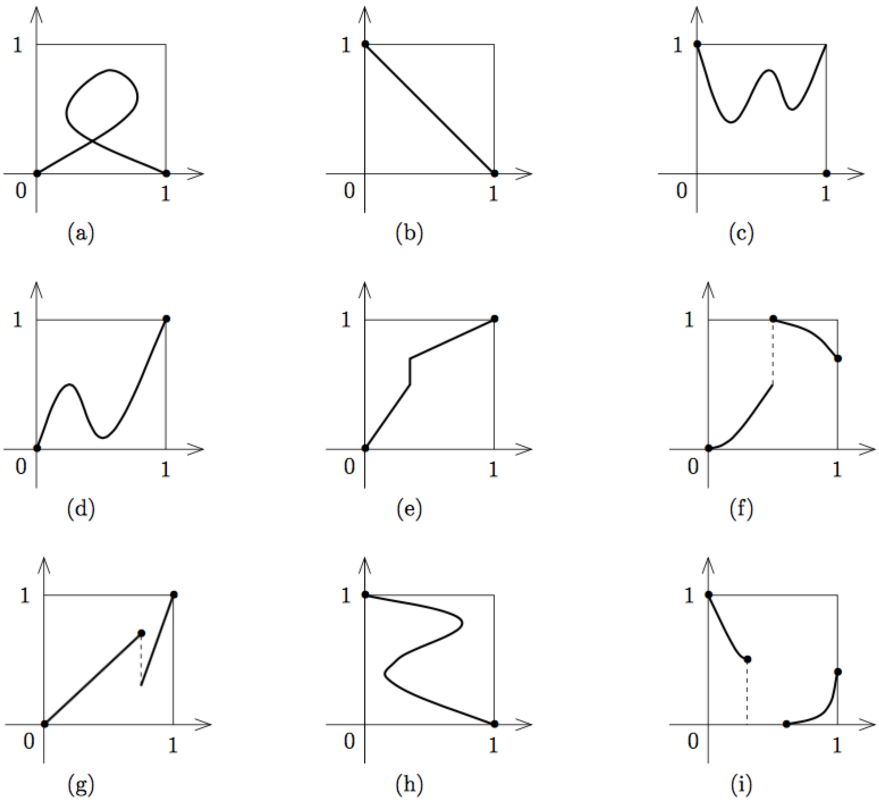
2. $\dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - x}}$

3. $\tan(2x)$.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, indiquer s'il s'agit du graphe d'une application, injection, surjection de $[0,1]$ dans $[0,1]$.



Exercice 3

Prouver que l'application de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \quad f(a,b) = a + b\sqrt{2}$ est injective.

Composition de fonctions

Exercice 4

Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle données par

$$f(x) = \frac{3}{x} \text{ et } g(x) = \frac{2-x}{2+x}.$$

1. Déterminer les antécédents de 0 et -2 par f et de 0 et -2 par g.

2. Trouver le domaine de définition ainsi que l'image de f et de g.
Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions numériques d'une variable réelle définies par

$$f_1(x) = f(f(x)),\ f_2(x) = f(g(x)),\ f_3(x) = g(f(x)) \text{ et } f_4(x) = g(g(x)).$$

3. Déterminer le domaine de définition de f_i, $i = 1, \ldots, 4$.

4. Trouver une expression simplifiée de f_i, $i = 1, \ldots, 4$.

Exercice 5

Soit l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 4$ et g l'application définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x-1}$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 6

On définit deux fonctions f et g sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 - x & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ x - 1/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles égales ?

Exercice 7

On définit deux applications f et g de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, 1/3] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 2/3] \\ 3x - 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles égales ? Trouver un sous-ensemble de $[0, 1]$ sur lequel $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes restrictions.

Fonctions majorées, minorées

Exercice 8

Déterminer si les fonctions suivantes sont majorée, minorée ou bornée :

1. $f(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

2. $f(x) = \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{x(x+1)}$ sur $\mathbb{R}^+$, sur $\mathbb{R} \setminus \{0,\ -1\}$.

3. $f(x) = \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

4. $f(x) = a\lfloor bx \rfloor - b\lfloor ax \rfloor$ où a et b sont des réels strictement positifs.

Exercice 9

1. Déterminer $\inf\limits_{x>0} \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$. Cette fonction admet-elle un minimum ?

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$. La fonction f est-elle minorée ? admet-elle un minimum ?

Monotonie

Exercice 10

Déterminer les fonctions réelles définies sur $\mathbf{R}$ qui sont :

1. à la fois croissantes et décroissantes.

2. à la fois monotones et périodiques.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est une fonction strictement croissante.
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$.

2. Montrer que si $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante, alors f est décroissante.

Parité, périodicité

Exercice 12

Parmi les fonctions définies par les formules suivantes, lesquelles sont paires ou impaires ?

1. $5x^4 - 3x^2$,

2. $2x^4 - x^3 + 1$,

3. $\cos(x^3)$,

4. $\sin(x^5 + x)$,

5. $\exp(|x|)$.

Exercice 13

1. Montrer que le graphe de la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par la formule $f(x) = x^2 + 2x + 3$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -1$.

2. Montrer que le graphe de la fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par la formule $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 6$ est symétrique par rapport au point $M(1, -5)$.

Définition d'applications

Exercice 14

On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x).$$

1. Les applications définies ci-dessous appartiennent-elles à A ?

a. f est une application constante

b. $f : x \mapsto 3x - 1$

c. $f : \left[\begin{array}{ll} 0 & \mapsto 0 \\ x & \mapsto 1 \text{ si } x \neq 0 \end{array} \right.$

d. $f : \left[\begin{array}{ll} 1 & \mapsto 0 \\ x & \mapsto 1 \text{ si } x \neq 1 \end{array} \right.$

2. On suppose que f appartient à A.

a. Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(4t) = f(t)$.

b. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(x)$.

Exercice 15

Soit f et g, deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
On définit les fonctions $f_+ = \sup(f,\ 0)$ et $f_- = \sup(-f,\ 0) = -\inf(f,\ 0)$.

1. Montrer que : $f_+ = \dfrac{|f| + f}{2}$ et $f_- = \dfrac{|f| - f}{2}$.

2. Exprimer $|f|$ et f en fonction de f_+ et de f_-

3. Montrer que, si g et h sont deux fonctions positives telles que $f = g - h$, alors $f_+ \leq g$ et $f_- \leq h$.

4. Vérifier : $\sup(f_+,\ f_-) = |f|$ et $\inf(f_+,\ f_-) = 0$.

5. Montrer : $(f + g)_+ \leq f_+ + g_+$. Peut-il y avoir inégalité stricte dans cette inégalité ?

6. Montrer que : $f \leq g \Leftrightarrow (f_+ \leq g_+ \ \text{ et } g_- \leq f_-)$.

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 16

Déterminer puis représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1(x, y) = \cos(x + 2y + 1)$

2. $f_2(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

3. $f_3(x, y) = (|xy|, x\ln(y^2 - x))$

4. $f_4(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$

Exercice 17

On considère les applications f_1, f_2, f_3 de $\mathbb{Z}^3$ dans $\mathbb{Z}^3$ telles que pour chaque $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$:

— $f_1(x, y, z) = (x + 2z, z, y - x - z)$

— $f_2(x, y, z) = (2y - x, y, x - y + z)$

— $f_3(x, y, z) = (x - 2y, x - y + z, y)$.

Déterminer $f_1 \circ f_3$, $f_3 \circ f_1$ et $f_2 \circ f_2$.

Exercice 18

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ et on définit la fonction F par $F(r, \theta) = f(r \cos\theta, r \sin\theta)$. Déterminer explicitement F.
2. Soient f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y, z) associe $(x + y^2, xy^2 z)$ et g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à (u, v) associe $(u^2 + v, uv, e^v)$. Déterminer explicitement $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = \big(\sin(xy), y \cos x, xy \sin(xy) \exp(y^2)\big), \; g(u, v, w) = uvw.$$

Déterminer $g \circ f$. Peut-on définir $f \circ g$?

Exercice 19

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$ pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer $f^{-1}(\{(3, 2)\})$. L'application f est-elle injective ?
2. Est-elle surjective ?
3. Quelle est son image ?

Pour aller plus loin

Exercice 20

Déterminer les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ vérifiant les affirmations suivantes :

1. $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|$
2. $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) + f(y)| = |x + y|$
3. $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$
4. $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) - f(x - y) = 4xy$
5. $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(x^2 - 1) = x$
6. $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y^2) = f(x^2) + f(y)$
   (Indication : Calculer $f(0)$. Montrer que $f(x) = f(x^2) = f(x^4)$ puis calculer : $f((-x^2) + x^2)$.)

Exercice 21

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction telle que : $\forall x \in [0, 1] \quad 2x - f(x) \in [0, 1]$ et $f(2x - f(x)) = x$.
On définit g par $g(x) = 2x - f(x)$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1 \quad g^{[n]}(x) - x = n(g(x) - x)$ où $g^{[n]} = g \circ g \circ \cdots \circ g$ (n fois)
2. Majorer $|g(x) - x|$. En déduire une expression de g
3. En déduire une expression de f.

Exercice 22

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = nf(1)$.
2. $\forall n \in \mathrm{Z} \quad f(n) = nf(1)$.
3. $\forall q \in \mathbb{Q} \quad f(q) = qf(1)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = xf(1)$
   (Indication : on pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour encadrer x par des rationnels de plus en plus proches de x).