Feuille n^o 4 : Calcul de Primitives

1 Intégration par parties

Exercice 1

Calculer une primitive des fonctions suivantes

1. x^2e^{-x}

2. $\arctan x$

3. $e^x \cos(x)$

4. $x^3e^{-x^2}$

5. $\ln x$

6. $x \ln x$

7. $\ln^2 x$

8. $x^3 \text{sh}\, x$

9. $\cos x \ln(1 + \cos x)$

10. $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

11. $\arctan\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + x.$

Exercice 2

1. Soit n un entier naturel. Intégrer par parties $I_n = \displaystyle\int_0^\pi x(\pi - x)\cos(nx)\, dx.$

2. Calculer, en intégrant par parties, $I = \int \exp(\alpha x)\cos(\beta x)\, dx$ en fonction de $J = \int \exp(\alpha x)\sin(\beta x)\, dx$. Calculer J en fonction de I. En déduire les valeurs de I et J.

2 Changement de variable

Exercice 3

Calculer l'intégrale suivante en utilisant le changement de variables $t = 1/x$.

$$I = \int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x(x-1)}}.$$

Exercice 4

Calculer une primitive des fonctions suivantes en les mettant sous la forme $\phi' f'(\phi)$

1. $\dfrac{1}{x^2 + 25}$

2. $\dfrac{1}{(1 + x)\sqrt{x}}$

3. $x\sqrt{1 + x^2}$

4. $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^4}}$

5. $\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$
6. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$
7. $\cos^3 x$
8. $\dfrac{x^3}{x^4+3x^2+2}$
9. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 5

Calculer une primitive des fonctions suivantes

1. $\dfrac{1}{\cos x}$
2. $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$

3 Fractions rationnelles

Exercice 6

Calculer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. **a.** Trouver trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{X^3-X}=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X-1}+\dfrac{c}{X+1}$.

   b. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3-x}$.
2. **a.** Trouver trois réels a, b et c tels que $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}=a+\dfrac{b}{X-1}+\dfrac{c}{X-2}$.

   b. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}$.

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^3}{1-t}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t}{t^2-t+1}\,dt$

4 Par parties ou par changement de variables ?

Exercice 8

Déterminer une primitive des fonctions suivantes

1. $\sin(\cos x)\sin x$
2. $x^3e^{-x^2}$
3. $2x(x^2+1)\exp(x^2)$.
4. $x^{1/2}\ln x$
5. $\dfrac{\sin x}{e^x}$

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Répondre (en le justifiant) aux affirmations suivantes :

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
2. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est négative sur $\mathbb{R}$ alors F est décroissante sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est paire alors F est impaire.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

1. Montrer que si $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2. Calculer, en utilisant 1), les intégrales suivantes :

$$a)\quad \int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx \qquad\qquad b)\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan(x)\right)\,dx.$$

5 Pour aller plus loin

Exercice 11

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Établir une formule de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
3. Montrer que le produit $(n\ +1)I_nI_{n+1}$ est constant.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}I_n$.
5. Calculer I_{2n} et I_{2n+1} sous forme de produit et en déduire une suite de rationnels convergeant vers π.

Exercice 12

Déterminer toutes les fonctions continues $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\int_a^b f(t)dt\ = (b-a)\sup_{t\in[a,b]} f(t).$$

Exercice 13

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Calculer la limite de la suite $u_n = \displaystyle\int_0^1 (f(x))^n dx$.