Portail Maths et applications - L1 | **Analyse 1**
Université Rennes 1 | 2018–2019

Examen 2eme Session
Vendredi 14 juin, 14h-16h
Durée : 2 h

L'usage de la calculatrice est interdit.
La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
Les réponses doivent être justifiées.

Questions de cours **6pts**

1. Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{e^{\sin(x)}}{\arctan(x)}$$

2. Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer les dérivées partielles de la fonction définie par

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1) + \arcsin(x) + xy$$

3. Rappeler la définition de la phrase "la suite u tend vers l'infini".

4. Montrer uniquement à l'aide des définitions que la suite de terme général $u_n = \frac{\cos(\sqrt{n})}{n^3}$ tend vers 0.

5. Donner une primitive des fonction suivantes :

$$x \mapsto \frac{4x}{x^2+3} \qquad x \mapsto \ln(x)$$

6. Trouver et justifier la limite de la suite de terme général $v_n = n^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 1 **3pts**

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $|x-1| \leqslant 2$ et que $-2 \leqslant y \leqslant -1$. Fournir un majorant et un minorant pour chacun des nombres suivants

$$x+y, \quad x-y\,, \quad xy.$$

Exercice 2 **4pts**

Trouver $A, B, C \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{x^2+2x+3}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+2x+3}{x(x^2+1)}$.

Exercice 3 **6pts**

On considère la fonction g définie par la formule $g(x) = \ln(2-x-x^2)$.

1. **1.** Donner le domaine de définition de g. 0.5pts
2. **2.** Montrer que la droite $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de g. 0.5pts
3. **3.** Donner le domaine de dérivabilité de g et calculer g'. 1pts
4. **4.** Dresser le tableau de variation de g.

Soit h une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction f par $f = h \circ g(x)$.

5. **5.** Donner le domaine de définition de f. 1pts
6. **6.** La courbe représentative de f admet-elle un axe de symétrie ? 1pts
7. **7.** Donner le domaine de dérivabilité de f et calculer f' en fonction de h'. 1pts
8. **8.** On suppose que la dérivée de h est toujours strictement positive. Dresser le tableau de variation de f. Calculer les minimums et maximums locaux de f. 1pts

Exercice 4 **5pts**

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$ et les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminées par $u_0 = b$, $v_0 = a$ et les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} & = & \frac{2u_n+3v_n}{5}, \\ v_{n+1} & = & \frac{u_n+4v_n}{5}. \end{cases}$$

1. **1.** Montrer que la suite de terme général $u_n - v_n$ est géométrique. Quelle est sa raison ?
2. **2.** Étudier la monotonie de la suite u.
3. **3.** Étudier la monotonie de la suite v.
4. **4.** Montrer que les suites u et v convergent.
5. **5.** À l'aide de la suite de terme général $u_n + 3v_n$, déterminer leurs limites.