Portail Maths et applications - L1
Université Rennes 1

Analyse 1
2019 – 2020

Contrôle continu 1
Durée : Deux heures

L'usage de la calculatrice est interdit.
Aucun document n'est autorisé.
La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
Les réponses aux exercices doivent être justifiées.

Sur votre copie doit figurer de façon LISIBLE votre PRÉNOM, votre NOM, et votre groupe.

— MA1 (responsable Taoufik Hmidi)
— MA2 (resp. Karim Bekka)
— MA3 (resp. Marie-Pierre Lebaud)
— MA4 (resp. Ludovic Marquis)

Questions de cours

1. Soit $f : E \to F$ une application.
  a. Rappeler la définition "*d'application réciproque*".
  b. Rappeler l'hypothèse sur f qui assure l'existence et l'unicité d'une application réciproque.
  c. Donner deux exemples d'applications $f : I \to J$, où I, J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, ayant une application réciproque et donner les applications réciproques de ces deux exemples.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Soit $C(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donner la condition que doit vérifier f pour que son graphe soit symétrique par rapport au point C.

Exercice 1

On définit deux applications f et g de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, 1/3] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 2/3] \\ 3x - 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que les applications f et g sont bien à valeurs dans $[0, 1]$.

2. Tracer les graphes de f et g.

3. Déterminer $f \circ g$.

Exercice 2

Prouver que l'application de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \quad f(a, b) = a + b\sqrt{2}$ est injective.

Exercice 3

Déterminer si la fonction f suivante est majorée, minorée ou bornée :

$$f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

où $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière de x. *On pourra calculer des limites de f en des points bien choisis.*

Problème

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = 2\sqrt{|x(x-1)|} - 1.$$

1. Donner le domaine de définition de f.

2. Montrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie du graphe de l'application f.

3. Calculer la dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

4. Faire le tableau de variations de f.

5. Montrer que f admet un minimum global et déterminer en quelle(s) valeur(s).

6. **a.** Vérifier que $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} > 1$ et que $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} < 0$. *Sans utiliser de valeur approchée de* $\sqrt{2}$.

b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

c. Faire un tableau de signe de f.

7. **a.** Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ 4ab \leqslant (a+b)^2$.

b. En déduire que la courbe représentative de f est en-dessous de la droite d'équation $y = 2x - 2$ si $x \geqslant 1$.

8. Faire le graphe de la fonction f.