

Feuille n° 4 : Calcul de Primitives

## 1 Intégration par parties

### Exercice 1

Calculer une primitive des fonctions suivantes

1.  $\ln x$
2.  $x \ln x$
3.  $\arctan x$
4.  $x^2 e^{-x}$
5.  $e^x \cos(x)$
6.  $x^3 e^{-x^2}$
7.  $x^3 \operatorname{sh} x$
8.  $\ln^2 x$
9.  $\cos x \ln(1 + \cos x)$
10.  $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
11.  $\arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x$ .

### Exercice 2

1. Soit  $n$  un entier naturel. Intégrer par parties  $I_n = \int_0^\pi x(\pi - x) \cos(nx) dx$ .
2. Calculer, en intégrant par parties,  $I = \int \exp(\alpha x) \cos(\beta x) dx$  en fonction de  $J = \int \exp(\alpha x) \sin(\beta x) dx$ . Calculer  $J$  en fonction de  $I$ . En déduire les valeurs de  $I$  et  $J$ .

## 2 Changement de variable

### Exercice 3

Calculer l'intégrale suivante en utilisant le changement de variables  $t = 1/x$ .

$$I = \int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x(x-1)}}.$$

### Exercice 4

Calculer une primitive des fonctions suivantes en les mettant sous la forme  $\phi' f'(\phi)$

1.  $\frac{1}{x^2 + 25}$
2.  $\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$
3.  $x\sqrt{1+x^2}$
4.  $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

5.  $\frac{e^x}{e^{2x} + 1}$
6.  $\frac{\sin x}{\sqrt{4 - \cos^2 x}}$
7.  $\cos^3 x$
8.  $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$

### Exercice 5

Calculer une primitive des fonctions suivantes

1.  $\frac{1}{\cos x}$
2.  $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$

## 3 Fractions rationnelles

### Exercice 6

Calculer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. a. Trouver trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $\frac{1}{X^3 - X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1}$ .  
 b. Calculer une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x^3 - x}$ .
2. a. Trouver trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} = a + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X - 2}$ .  
 b. Calculer une primitive de  $x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 3x + 2}$ .
3. a. Trouver trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $\frac{X^2 + 2}{X^2 + 1} = a + \frac{bX + c}{X^2 + 1}$ .  
 b. Calculer une primitive de  $x \mapsto \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$ .
4. a. Trouver quatre réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  tels que  $\frac{X^3 + 1}{X^2 + 4} = aX + b + \frac{cX + d}{X^2 + 4}$ .  
 b. Calculer une primitive de  $x \mapsto \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4}$ .

### Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int_0^{1/2} \frac{t^3}{1 - t} dt$
2.  $\int_0^1 \frac{t}{t^2 - t + 1} dt$

## 4 Par parties ou par changement de variables ?

### Exercice 8

Déterminer une primitive des fonctions suivantes

1.  $\sin(\cos x) \sin x$
2.  $x^3 e^{-x^2}$
3.  $2x(x^2 + 1) \exp(x^2)$ .

4.  $x^{1/2} \ln x$
5.  $\frac{\sin x}{e^x}$

### Exercice 9

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue et  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

Répondre (en le justifiant) aux affirmations suivantes :

1.  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $f$ .
2. Si  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .
3. Si  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
4. Si  $f$  est négative sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
5. Si  $f$  est paire alors  $F$  est impaire.
6. Si  $f$  est  $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est  $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 10

1. Montrer que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx.$$

2. Calculer, en utilisant 1), les intégrales suivantes :

$$a) \int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx \qquad b) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x)) dx.$$

## 5 Pour aller plus loin

### Exercice 11

On pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$ .

1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
2. Établir une formule de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n-2}$ .
3. Montrer que le produit  $(n + 1)I_n I_{n+1}$  est constant.
4. Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} I_n$ .
5. Calculer  $I_{2n}$  et  $I_{2n+1}$  sous forme de produit et en déduire une suite de rationnels convergeant vers  $\pi$ .

### Exercice 12

Déterminer toutes les fonctions continues  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\int_a^b f(t) dt = (b - a) \sup_{t \in [a, b]} f(t).$$

### Exercice 13

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application strictement croissante telle que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .

Calculer la limite de la suite  $u_n = \int_0^1 (f(x))^n dx$ .