

Feuille n° 2 : Fonctions, applications

**Domaine de définition**

**Exercice 1**

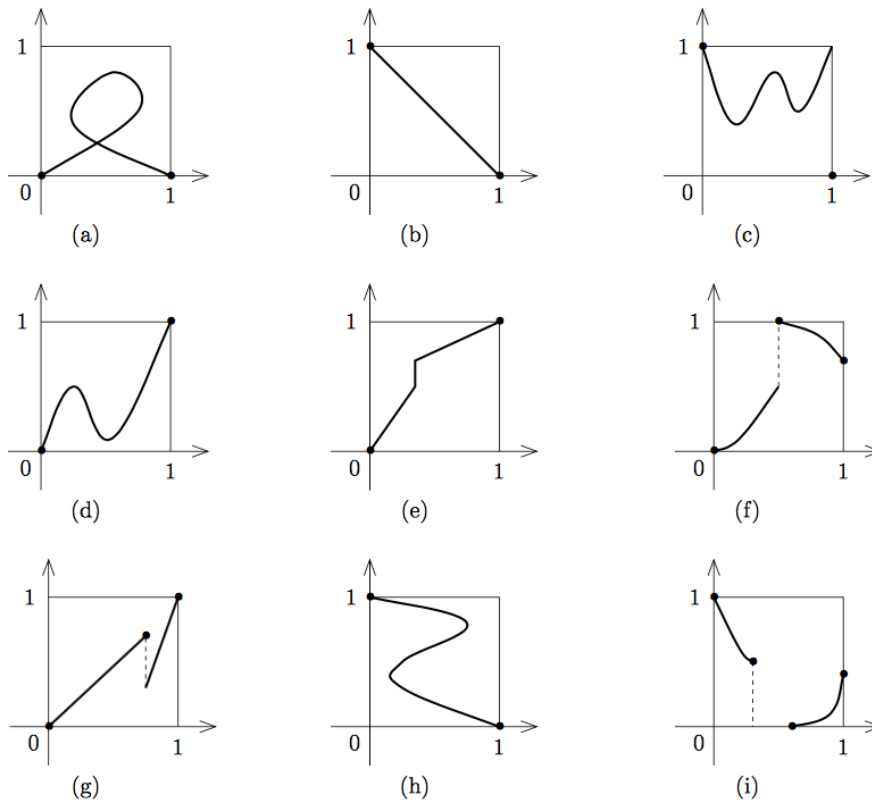
Trouver le domaine de définition des fonctions données par les formules suivantes :

1.  $\sqrt{x^2 - 3x - 4}$
2.  $\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - x}}$
3.  $\tan(2x)$ .

**Injektivité, surjectivité, bijectivité**

**Exercice 2**

Dans chacun des cas suivants, indiquer s'il s'agit du graphe d'une application, injection, surjection de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ .

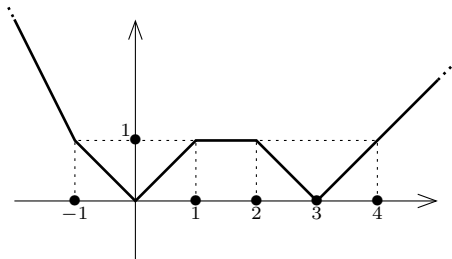


**Exercice 3**

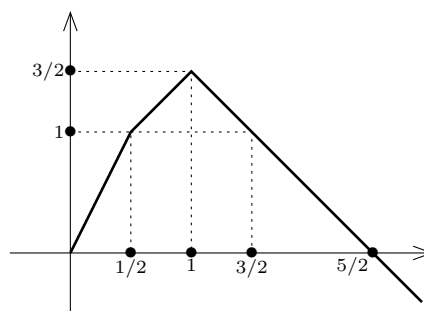
Prouver que l'application de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, f(a, b) = a + b\sqrt{2}$  est injective.

**Exercice 4**

On considère les deux fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  et  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dont les graphes sont représentés ci-dessous :



Graphe de  $f$



Graphe de  $g$

1. L'application  $f$  est-elle injective? Est-elle surjective? Est-elle bijective?
2. L'application  $g$  est-elle injective? Est-elle surjective? Est-elle bijective?

## Composition de fonctions

### Exercice 5

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques d'une variable réelle données par

$$f(x) = \frac{3}{x} \text{ et } g(x) = \frac{2-x}{2+x}.$$

1. Déterminer les antécédents de 0 et  $-2$  par  $f$  et de 0 et  $-2$  par  $g$ .
2. Trouver le domaine de définition ainsi que l'image de  $f$  et de  $g$ .  
Soient  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  les fonctions numériques d'une variable réelle définies par

$$f_1(x) = f(f(x)), f_2(x) = f(g(x)), f_3(x) = g(f(x)) \text{ et } f_4(x) = g(g(x)).$$

3. Déterminer le domaine de définition de  $f_i, i = 1, \dots, 4$ .
4. Trouver une expression simplifiée de  $f_i, i = 1, \dots, 4$ .

### Exercice 6

Soit l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - 4$  et  $g$  l'application définie sur  $[1, +\infty[$  par  $g(x) = \sqrt{x-1}$ . Déterminer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

### Exercice 7

On définit deux fonctions  $f$  et  $g$  sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$  par

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 - x & \text{si } x \in [0, 1/2[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2[ \\ x - 1/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ . Ces applications sont-elles égales?

### Exercice 8

On définit deux applications  $f$  et  $g$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, 1/3] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 2/3] \\ 3x - 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ . Ces applications sont-elles égales? Trouver un sous-ensemble de  $[0, 1]$  sur lequel  $f \circ g$  et  $g \circ f$  ont les mêmes restrictions.

## Fonctions majorées, minorées

### Exercice 9

Déterminer si les fonctions suivantes sont majorée, minorée ou bornée :

1.  $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$  sur  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
2.  $f(x) = \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x(x+1)}$  sur  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ .
3.  $f(x) = \frac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}}$  sur  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ .

4.  $f(x) = a[bx] - b[ax]$  où  $a$  et  $b$  sont des réels strictement positifs.

## Monotonie

### Exercice 10

Déterminer les fonctions réelles définies sur  $\mathbb{R}$  qui sont :

1. à la fois croissantes et décroissantes.
2. à la fois monotones et périodiques.

## Parité, périodicité

### Exercice 11

Parmi les fonctions définies par les formules suivantes, lesquelles sont paires ou impaires ?

1.  $5x^4 - 3x^2$ ,
2.  $2x^4 - x^3 + 1$ ,
3.  $\cos(x^3)$ ,
4.  $\sin(x^5 + x)$ ,
5.  $\exp(|x|)$ .

### Exercice 12

1. Montrer que le graphe de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par la formule  $f(x) = x^2 + 2x + 3$  est symétrique par rapport à la droite d'équation  $x = -1$ .
2. Montrer que le graphe de la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par la formule  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 6$  est symétrique par rapport au point  $M(1, -5)$ .

## Définition d'applications

### Exercice 13

On note  $E$  l'ensemble des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x).$$

1. Les applications définies ci-dessous appartiennent-elles à  $E$  ?
  - a.  $f$  est une application constante
  - b.  $f : x \mapsto 3x - 1$
  - c.  $f : \begin{cases} 0 & \mapsto 0 \\ x & \mapsto 1 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$
  - d.  $f : \begin{cases} 1 & \mapsto 0 \\ x & \mapsto 1 \text{ si } x \neq 1 \end{cases}$
2. On suppose que  $f$  appartient à  $E$ .
  - a. Démontrer que :  $\forall t \in \mathbb{R}, f(4t) = f(t)$ .
  - b. Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$ .

### Exercice 14

Soit  $f$  et  $g$ , deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ .

On définit les fonctions  $f_+ = \sup(f, 0)$  et  $f_- = \sup(-f, 0) = -\inf(f, 0)$ .

1. Montrer que :  $f_+ = \frac{|f| + f}{2}$  et  $f_- = \frac{|f| - f}{2}$ .
2. Exprimer  $|f|$  et  $f$  en fonction de  $f_+$  et de  $f_-$ .
3. Montrer que, si  $g$  et  $h$  sont deux fonctions positives telles que  $f = g - h$ , alors  $f_+ \leq g$  et  $f_- \leq h$ .
4. Vérifier :  $\sup(f_+, f_-) = |f|$  et  $\inf(f_+, f_-) = 0$ .
5. Montrer :  $(f + g)_+ \leq f_+ + g_+$ . Peut-il y avoir inégalité stricte dans cette inégalité ?
6. Montrer que :  $f \leq g \Leftrightarrow (f_+ \leq g_+ \text{ et } g_- \leq f_-)$ .

## Pour aller plus loin

### Exercice 15

Déterminer les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  vérifiant les affirmations suivantes :

1.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|$
2.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) + f(y)| = |x + y|$
3.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$
4.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) - f(x - y) = 4xy$
5.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(x^2 - 1) = x$
6.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y^2) = f(x^2) + f(y)$   
(Indication : Calculer  $f(0)$ . Montrer que  $f(x) = f(x^2) = f(x^4)$  puis calculer :  $f((-x^2) + x^2)$ .)

### Exercice 16

1. Déterminer  $\inf_{x>0} \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ . Cette fonction admet-elle un minimum ?
2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ . La fonction  $f$  est-elle minorée ? admet-elle un minimum ?

### Exercice 17

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. On suppose que  $f$  est une fonction strictement croissante.  
Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$ .
2. Montrer que si  $f \circ f$  est croissante et  $f \circ f \circ f$  est strictement décroissante, alors  $f$  est décroissante.

### Exercice 18

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction telle que :  $\forall x \in [0, 1] \quad 2x - f(x) \in [0, 1]$  et  $f(2x - f(x)) = x$ .

On définit  $g$  par  $g(x) = 2x - f(x)$ .

1. Montrer que  $\forall n \geq 1 \quad g^{[n]}(x) - x = n(g(x) - x)$  où  $g^{[n]} = g \circ g \circ \dots \circ g$  ( $n$  fois)
2. Majorer  $|g(x) - x|$ . En déduire une expression de  $g$
3. En déduire une expression de  $f$ .

### Exercice 19

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante telle que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$ . Montrer que

1.  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = nf(1)$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n) = nf(1)$ .
3.  $\forall q \in \mathbb{Q} \quad f(q) = qf(1)$ .
4.  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = xf(1)$   
(Indication : on pourra utiliser la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  pour encadrer  $x$  par des rationnels de plus en plus proches de  $x$ ).