Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°2 : Groupes Symétriques et Alternés

Petites questions

Exercice 1

1. Montrer que tout cycle est un produit de transpositions.
2. En déduire que le groupe $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions.
3. Montrer que pour toute permutation σ et toute transposition τ, on a $\varepsilon(\sigma\tau) = -\varepsilon(\sigma)$. On distinguera trois cas, en fonction des supports de σ et τ.

Exercice 2 (Décompositions explicites)

1. On considère l'élément de $\mathfrak{S}_8$:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$
Décomposer σ en un produit de transpositions et calculer sa signature. Peut-on écrire σ comme produit de douze transpositions ?
2. Soit σ l'élément de $\mathfrak{S}_{11}$:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 7 & 9 & 11 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$
Décomposer σ en un produit de cycles à support disjoints. Préciser l'ordre et la signature de σ. Calculer σ^2 et σ^3. Écrire σ^{-1} en un produit de cycles à support disjoints.

Exercice 3 (Ordre d'un cycle)

1. Si c est le cycle $(1\,2\,3\,4\,5\,6)$, c^2 est-il un cycle ?
2. Si c est un cycle de $\mathfrak{S}_n$ d'ordre l et k un entier naturel, calculer l'ordre de c^k.

Exercice 4 ($\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6)

Soit H un sous-groupe d'ordre 6 de $\mathfrak{A}_4$.

1. Montrer que pour tout $g \in \mathfrak{A}_4$, on a $g^2 \in H$.
2. En déduire que H contient tous les 3-cycles.
3. Conclure (éventuellement de deux manières...).

La réciproque au Théorème de Lagrange est donc fausse. Il s'agit du plus petit contre-exemple.

Divers

Exercice 5 (Étude de $\mathfrak{S}_3$)

Donner les structures de cycles possibles dans $\mathfrak{S}_3$, le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_3$ ayant cette structure, et leur signature. Décrire les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$, et ceux qui sont distingués dans $\mathfrak{S}_3$. Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 6 (Étude de $\mathfrak{S}_4$)

Donner les structures de cycles possibles dans $\mathfrak{S}_4$, le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_4$ ayant cette structure, et leur signature. Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$ (utiliser le résultat du cours sur les profils de permutations). En déduire que $\mathfrak{A}_4$ n'est pas un groupe simple. Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 7 (Ordre d'un groupe de permutations)

Soit G le sous-groupe de $\mathfrak{S}_7$ engendré par $\alpha = (2,4,6)(5,7,1)$ et $\beta = (3,4)(5,6)$. On se propose de déterminer l'ordre de G. On considère pour cela les ensembles suivants :

$$G_1 = \{\varphi \in G \mid \varphi(1) = 1\} \qquad G_2 = \{\varphi \in G_1 \mid \varphi(2) = 2\} \qquad G_3 = \{\varphi \in G_2 \mid \varphi(3) = 3\}$$

$$X_1 = \{\varphi(1) \mid \varphi \in G\} \qquad X_2 = \{\varphi(2) \mid \varphi \in G_1\} \qquad X_3 = \{\varphi(3) \mid \varphi \in G_2\}.$$

Étant donné un ensemble Y, on note $|Y|$ le cardinal de Y.

1. Montrer que 6 divise $|G|$.
2. Quelle relation existe-t-il entre $|G|$ et $|X_1|\ |X_2|\ |X_3|\ |G_3|$?
3. Expliciter X_1.
4. Expliciter $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}$ et $\delta = \gamma\beta\gamma^{-1}$. En déduire $X_3 = \{3,4,5,6\}$ ou $X_3 = \{3,4,5,6,7\}$ et $X_2 = \{2,7\}$ ou $X_2 = \{2,3,4,5,6,7\}$.
5. On fait agir G sur l'ensemble des parties de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Déterminer l'orbite de la partie $\{1,2,7\}$. *Ind. Courage, elle est de longueur* 7.
6. En déduire que 7 est fixé par les éléments de G_2.
7. À l'aide de la partie $\{1,4,5\}$ montrer que G_3 est réduit à l'identité.
8. En déduire $|G|$.

Exercice 8 (Le théorème de Cayley + Bonus)

1. Pour tout élément g d'un groupe fini G d'ordre n, on définit l'application
$$l_g \ : \ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & gx \end{array}$$
On note ω l'ordre de g. Montrer que l_g est une bijection de G, produit de $\frac{n}{\omega}$ cycles à support disjoints tous de longueur ω.
2. Montrer alors que l'application
$$l \ : \ \begin{array}{ccc} G & \to & \mathfrak{S}(G) \\ g & \mapsto & l_g \end{array}$$
est un morphisme de groupes, injectif. Tout groupe fini est donc isomorphe à un sous-groupe du groupe des permutations de ses éléments.
3. Montrer que la signature de l_g est $(-1)^{(\omega+1)\frac{n}{\omega}}$.
4. On écrit $n = 2^a u$ et $\omega = 2^b v$ avec u, v impairs. Montrer que $l(G) \leqslant \mathfrak{A}(G)$ si et seulement si aucun élément de G n'est d'ordre 2^a ou si $a = 0$.
5. En déduire un énoncé en terme de 2-Sylow.

Sous-groupes distingués

Exercice 9

1. Soit $f\ : \mathfrak{S}_n \to A$ un homomorphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ vers un groupe abélien. Démontrer que les transpositions ont toutes même image. Si $A = \mathbb{C}^\times$, en déduire que l'image d'une transposition est ± 1 et finalement que f est soit constante soit la signature.
2. Soit G d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$. Démontrer que G est distingué (on pourra reprendre la méthode de la feuille 1) puis que $G = \mathfrak{A}_n$.

Exercice 10 (Les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$)

Le but de l'exercice est de déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ (pour $n \geq 5$).

1. Soit H un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $H \cap \mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_n$. En déduire que H contient $\mathfrak{A}_n$ ou que $H \cap \mathfrak{A}_n = \{\mathrm{Id}\}$.
2. On suppose que $H \cap \mathfrak{A}_n = \{\mathrm{Id}\}$. Montrer que la restriction à H du morphisme signature est injective. Montrer que dans ce cas que tous les éléments de H sont dans le centre de $\mathfrak{S}_n$ et en déduire que $H = \{\mathrm{Id}\}$.
3. On suppose que H contient $\mathfrak{A}_n$. Montrer alors que $H = \mathfrak{S}_n$ ou $H = \mathfrak{A}_n$ suivant l'indice de H dans $\mathfrak{S}_n$.
4. Conclure : si $n \geqslant 5$, les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$..

Exercice 11

Le but de l'exercice est de déterminer les groupes dérivés successifs de $\mathfrak{S}_4$. On notera V_4 le sous-groupe des permutations de profil $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ (avec l'identité).

1. Montrer que $D(\mathfrak{S}_4) \subset \mathfrak{A}_4$.
2. Calculer les commutateurs $(1,2)(1,3)(1,2)^{-1}(1,3)^{-1}$ et $(1,2,3)(1,2,4)(1,2,3)^{-1}(1,2,4)^{-1}$.
3. Montrer que $D(\mathfrak{S}_4) = \mathfrak{A}_4$.
4. Montrer que $V_4 \subset D(\mathfrak{A}_4)$.
5. Vérifier que V_4 est distingué dans $\mathfrak{A}_4$ et que le quotient $\mathfrak{A}_4/V_4$ est un groupe abélien. En déduire que $D(\mathfrak{A}_4) \subset V_4$.
6. En déduire $D^2(\mathfrak{S}_4)$.
7. Calculer les autres groupes dérivés de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 12

1. Montrer que le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par les carrés est égale au groupe $\mathfrak{A}_n$.
2. En déduire (une nouvelle fois, cf exo 9) que $\mathfrak{A}_n$ est l'unique sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$.

Simplicité

Exercice 13 (Preuve alternative par récurrence de la simplicité du groupe alterné)

Soit $n \geqslant 5$ et supposons que $\mathfrak{A}_n$ est simple. On va montrer qu'alors $\mathfrak{A}_{n+1}$ est simple. Soit $N \lhd \mathfrak{A}_{n+1}$.

1. Cas 1 : Supposons qu'il existe un élément $g \in N$ non trivial possédant un point fixe. En utilisant l'hypothèse de récurrence, montrer que $N = \mathfrak{A}_{n+1}$.
2. Cas 2 : Supposons que tous les éléments non triviaux de N agissent sans point fixe. Soit $g \in N$. On pose $j = g(1)$, considérer l'élément $[g,(1jk)]$ pour conclure, où k est un point bien choisi différent de 1 et j.

Résolubilité

Exercice 14

1. Montrer que tout groupe d'ordre $2^\alpha p^\beta$ avec p premier, $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, $\beta \geqslant 1$ est résoluble.
2. En déduire que tout groupe d'ordre < 60 est résoluble, en utilisant les résultats de la feuille précédente et en faisant les cas restants $n = 24, 30, 40, 48$ ... à la main.

Exercice 15

Montrer que tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$. (*Ind. Montrer que G possède* 5 *2-Sylow*).

Géométrie

Exercice 16

Montrer que le groupe des isométries du tétraèdre régulier est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ et que le groupe des isométries directes du tétraèdre régulier est $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 17

Montrer que le groupe des isométries du cube est un produit semi-direct d'un groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Pour aller plus loin

Exercice 18

(Chapitre 11, Escofier, Théorie de Galois) Soit p un nombre premier. Le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$ agit sur $\mathbb{F}_p$. On notera encore $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$ l'image dans $\mathfrak{S}_p = \mathfrak{S}(\mathbb{F}_p)$ obtenue via cette action. On note T_p le groupe des translations de $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$.

1. Montrer que tout sous-groupe de $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$ qui contient T_p est résoluble et transitif (i.e qui agit transitivement sur $\{1, \dots, p\}$.).

   Le but de l'exercice est de montrer la réciproque.
2. Soit R un sous-groupe résoluble et transitif de $\mathfrak{S}_p$.
3. Soit H distingué non-trivial dans R. Montrer que H est résoluble et transitif.
4. On considère une suite $R = H_0 \geqslant H_1 \geqslant \cdots \geqslant H_n = 1$ de Jordan-Hölder de R. Montrer que H_{n-1} est conjugué à T_p.
5. Montrer que le normalisateur de T_p dans $\mathfrak{S}_p$ est $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$.
6. Montrer que le normalisateur de $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$ dans $\mathfrak{S}_p$ est $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$.
7. En déduire qu'il existe un $g \in \mathfrak{S}_p$ tel que $gRg^{-1} \leqslant \mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$.

Exercice 19

Montrer qu'en suivant les règles du taquin, on ne peut pas passer de la position initiale à gauche à la position finale à droite.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	