THGG - Feuille 1.5

Exercice 1

Montrer que la réciproque du théorème chinois est vraie : si $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alors m et n sont premiers entre eux.

Exercice 2

Soit G un groupe fini et soit p le plus petit facteur premier de $|G|$. Si H est un sous-groupe distingué d'ordre p, montrer que $H \subseteq \mathrm{Z}(G)$.

Exercice 3

Que dire des exercices 18 et 19 de la feuille de TD 1 si le groupe G est infini ?

Exercice 4

Montrer que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps (commutatif) est cyclique.

Exercice 5

Soit p un nombre premier. On note φ la fonction indicatrice d'Euler.

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| = \varphi(n)$ et en déduire que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.
2. On suppose $p \geq 3$.
   (a) Soient a, b deux éléments d'un groupe G qui commutent et qui d'ordre m et n premiers entre eux. Montrer que ab est d'ordre mn. Le résultat reste-t-il vrai si m et n ne sont plus supposés premiers entre eux ?
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $(1+p)^{p^k} = 1 + \lambda p^{k+1}$ avec $\lambda \in \mathbb{N}^*$ premier à p.
   (c) Si $\alpha \geq 2$, en déduire que $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/\varphi(p^\alpha)\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p^{\alpha-1}(p-1)\mathbb{Z}$. On pourra considérer le morphisme naturel $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

Exercice 6

1. Soit $n \geq 5$. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est le seul sous-groupe distingué strict non trivial de $\mathfrak{S}_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Montrer que tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Exercice 7

Un automorphisme *intérieur* d'un groupe G est donné par la conjugaison par un élément $g \in G$. On note $\mathrm{Int}(G) \subseteq \mathrm{Aut}(G)$ le sous-groupe des automorphismes intérieurs. Soit $n \neq 6$.

1. Montrer que si $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ transforme toute transposition en transposition alors ϕ est intérieur.
2. Écrivons $n = k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n$ et soit $s \in \mathfrak{S}_n$ un produit de $k_1 + \cdots + k_n$ cycles disjoints avec k_i cycles d'ordre i pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que le cardinal du centralisateur de s est $\prod_{i=1}^n k_i! i^{k_i}$.
3. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$.