Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°1 : Les bases de la théorie des groupes

Action de groupes

Exercice 1 (Application des formules de comptage)

On fixe une action d'un groupe G sur un ensemble fini E.

1. On suppose que l'ordre de G est 15, que le cardinal de E est 17 et que E n'a pas de point fixé par tous les éléments du groupe G. Déterminer le nombre d'orbites et le cardinal de chacune d'elles.
2. Montrer que toute action d'un groupe d'ordre $143 = 11 \cdot 13$ sur un ensemble de cardinal 25 possède un point fixe.

Exercice 2 (Des petites questions)

On considère l'action d'un groupe G sur un ensemble X.

1. Montrer qu'un sous-ensemble de X est globalement stable par G si et seulement s'il est réunion d'orbites.
2. Montrer que deux éléments dans la même orbite ont des stabilisateurs conjugués.
3. Montrer que deux éléments conjugués dans le groupe G fixent le même nombre d'éléments.
4. Soit E un ensemble et $Y = \{f : X \to E\}$ l'ensemble des applications de X vers E. Montrer que les formules suivantes $(g * f)(x) = f(g \cdot x)$ et $(g \odot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$ définissent une action à droite et une action à gauche.
5. Soit k un entier. On dit qu'une action est k-transitive lorsque pour tout $x_1, ..., x_k \in X$ distincts et tout $y_1, ..., y_k \in X$ distincts, il existe un $g \in G$ tel que $g \cdot x_i = y_i$ pour $i = 1, ..., k$. Soit $k \geqslant 2$. Montrer qu'une action est k-transitive si et seulement si elle est transitive et que l'action du stabilisateur de tout point $x \in X$ sur $X \smallsetminus \{x\}$ est $(k-1)$-transitive si et seulement si elle est transitive et que l'action d'un stabilisateur d'un point $x \in X$ sur $X \smallsetminus \{x\}$ est $(k-1)$-transitive.

Exercice 3 (Autour des p-groupes)

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que le centre d'un p-groupe[1] G, n'est pas réduit à l'élément neutre.
2. Montrer que si le quotient d'un groupe par son centre est cyclique alors le groupe est abélien, donc égal à son centre.
3. Montrer qu'un groupe d'ordre p^2 est abélien. En déduire la liste des groupes d'ordre p^2.
4. Montrer que le centre Z d'un groupe non abélien G d'ordre p^3 est d'ordre p et $G/Z \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.
5. En déduire que $D(G) = Z$.

Exercice 4 (Action par translation sur G/H)

Soit G un groupe et H un sous-groupe. On considère l'action de G sur G/H par translation à gauche.

1. Montrer que cette action est transitive.
2. Identifier le stabilisateur de la classe xH.
3. En déduire le noyau de cette action.
4. *Application 1 :* Supposons G fini. Soit p le plus petit facteur premier de l'ordre de G. Soit H un sous-groupe de G d'indice p.
   - Montrer que les orbites de l'action de H sont réduites à des points.
   - En déduire que H est distingué.
5. *Application 2 :* Montrer qu'un groupe infini qui possède un sous-groupe d'indice fini n'est pas simple.

1. i.e. un groupe fini d'ordre une puissance non nulle de p.

Exercice 5 (Lemme du Ping-Pong)

Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Soit E_1 et E_2 deux parties non vides et disjointes de E. Soit g_+ et g_- deux éléments de G tels que toute puissance (positive ou négative) de g_+ envoie tout élément de E_1 dans E_2 et toute puissance de g_- envoie tout élément de E_2 dans E_1.

1. Montrer que les mots de la forme $g_+^{k_1} g_-^{l_1} g_+^{k_2} g_-^{l_2} \cdots g_+^{k_d} g_-^{l_d} g_+^{k_{d+1}}$ ne sont pas égaux à l'élément neutre e_G.
2. En déduire en utilisant une conjugaison qu'aucun mot du groupe engendré par g_+ et g_- autre que le mot vide n'est égal à l'élément neutre. On dit alors que le groupe engendré par g_+ et g_- est un groupe libre.
3. Que dire si on suppose seulement que E_1 n'est pas inclus dans E_2 ?
4. Montrer le sous groupe de $SL(2, \mathbb{Z})$ engendré par

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   est libre, en considérant l'action naturelle sur $\mathbb{R}^2$ et les domaines $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < |y|\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| > |y|\}$ délimités par les diagonales.

Exercice 6 (Sur le groupe des isométries du diamant)

Combien existe-il de coloriages différents, avec deux couleurs, de cette pyramide double à base carré, que nous appelerons "diamant" ? C'est le but de cet exercice.

Précisons que les faces sont isocèles mais pas équilatérales et qu'on identifiera deux façons de colorier si elles coïncident quitte à déplacer le diamant.

On considère le groupe D des isométries qui conservent globalement le diamant et son action naturelle sur le diamant.

1. Déterminer l'orbite et le stabilisateur d'un sommet A. En déduire le cardinal de D.
2. Déterminer la liste des éléments de D.
3. Calculer le nombre de façons de colorier le diamant.
4. On fait agir le groupe D de façon naturelle sur l'ensemble de ces façons de colorier. A quoi correspond en termes de cette action de groupe le nombre de coloriages différents ?
5. Calculer le nombre de façons de colorier fixées par chaque élément du groupe D.
6. Conclure.

Théorème de Sylow

Exercice 7

Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Exercice 8

1. Montrer que tout groupe d'ordre 63 n'est pas simple.
2. Montrer que tout groupe d'ordre 255 n'est pas simple.
3. Montrer que tout groupe d'ordre 35 est cyclique.

Exercice 9 (2-Sylow des groupes diédraux)

On appelle groupe diédral $\mathbb{D}_n$ le groupe des isométries d'un polygone régulier à n côtés.

1. Déterminer (par exemple à l'aide d'une action de groupe) le cardinal puis la liste des éléments de $\mathbb{D}_n$.
2. On suppose n impair. Déterminer les 2-Sylow de $\mathbb{D}_n$ et vérifier qu'ils sont conjugués.
3. On suppose $n = 6$. Déterminer un 2-Sylow de $\mathbb{D}_6$. Déterminer deux sous-groupes d'ordre 2 de $\mathbb{D}_6$ non conjugués dans $\mathbb{D}_6$.

Exercice 10 (Groupes d'ordre pq^β)

Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts et $\beta \geqslant 1$ un entier. Soit G un groupe d'ordre pq^β.

1. Montrer que G n'est pas simple (on pourra trouver un sous-groupe S d'ordre q^β).

2. Montrer que G est un produit semi-direct entre S et un autre groupe.

Exercice 11 (Groupes d'ordre p^2q)

Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts. Nous allons montrer que tout groupe G d'ordre p^2q n'est pas simple. On note k_q le nombre de q-Sylow de G.

1. Montrer que si $k_q \neq 1$ alors $p^2 \equiv 1[q]$.
2. En déduire qu'alors $p = 2$ et $q = 3$, faire ce cas à part.
3. Montrer que si $p \neq 2$ ou $q \neq 3$, alors G n'est pas simple et est le produit semi-direct d'un p-Sylow et d'un q-Sylow.

Petits groupes

Exercice 12 (Groupes d'ordre $2p$)

Soient p un nombre premier impair et G un groupe à $2p$ éléments.

1. Montrer que G possède un élément r d'ordre p et un élément s d'ordre 2.
2. Montrer que $G = \langle r, s\rangle$ et que $\langle r\rangle$ est distingué dans G.
3. Montrer que le groupe $Aut(\langle r\rangle)$ des automorphismes de $\langle r\rangle$ est un groupe cyclique d'ordre $p-1$. En déduire que $Aut(\langle r\rangle)$ contient un unique élément d'ordre 2.
4. En déduire que $srs^{-1} = r$ ou $srs^{-1} = r^{-1}$ puis que G est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ ou groupe diédral $\mathbb{D}_p$.
5. En déduire que $\mathfrak{S}_3$ est isomorphe à $\mathbb{D}_3$.
6. En déduire la classification des groupes d'ordre $6, 10, 14, 22, ...$.

Exercice 13 (Groupes d'ordre 8)

1. Lister les groupes abéliens d'ordre 8.
2. Soit G un groupe non abélien d'ordre 8. Montrer que G possède un élément a d'ordre 4 et aucun élément d'ordre 8.
3. Montrer que $\langle a\rangle$ est distingué dans G.
4. Soit $b \notin \langle a\rangle$, montrer que si l'ordre de b est 2 alors $bab^{-1} = a^{-1}$.
5. En déduire que ou bien G est isomorphe au groupe diédral $\mathbb{D}_4$ ou bien tous les éléments de $G \setminus \langle a\rangle$ sont d'ordre 4.
6. En supposant que G vérifie la seconde hypothèse, montrer que G possède 6 éléments d'ordre 4 et un élément d'ordre 2.
7. En déduire que G est isomorphe au groupe $\mathbb{H} = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ où $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = k$.

Exercice 14 (Groupes d'ordre 12)

Soit G un groupe d'ordre 12. On note k_p le nombre de p-Sylow de G.

1. Faire la liste des groupes abéliens d'ordre 12.
2. Montrer que $k_2 = 1$ ou 3.
3. Montrer que $k_3 = 1$ ou 4.
4. En déduire que $k_2 = 1$ ou $k_3 = 1$.
5. On se place tout d'abord dans le cas où $k_2 = 1$, en déduire que G est un produit semi-direct entre un sous-groupe S_2 d'ordre 4 et un sous-groupe K d'ordre 3.
6. Montrer que si S_2 est cyclique alors G est abélien.
7. On suppose à présent G non abélien, montrer qu'alors $k_3 = 4$. En déduire un morphisme de G vers $\mathfrak{S}_4$ via une action transitive sur 4 objets.
8. Montrer que cette action est fidèle.
9. En déduire que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$.
10. On se place à présent dans le cas où $k_3 = 1$, en déduire que G est un produit semi-direct entre un sous-groupe K d'ordre 4 et un sous-groupe S_3 d'ordre 3.
11. On suppose G non abélien. En déduire que G est isomorphe à $\mathbb{D}_6 = \mathbb{D}_3 \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ ou à $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \rtimes \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$
12. Conclusion : faire la liste des 5 groupes d'ordre 12.

Résolubilité

Exercice 15 Groupe triangulaire supérieur

1. Montrer que le groupe de Heisenberg H des matrices $3 * 3$ triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, est résoluble.
2. Montrer que le groupe B des matrices triangulaires supérieures $3 * 3$ inversibles est résoluble.

Divers

Exercice 16

1. Soit G un groupe, a et b deux éléments d'ordre fini qui commutent. On suppose que les sous-groupes engendrés $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$ ont une intersection réduite au singleton élément neutre $\{e\}$.
   (a) Montrer qu'une égalité $(ab)^m = e$ implique $a^m = e$ et $b^m = e$.
   (b) Calculer l'ordre de ab.
2. Montrer que si deux éléments d'un groupe ont des ordres premiers entre eux, l'intersection des sous-groupes qu'ils engendrent est réduite au singleton élément neutre.
3. Retrouver que tout groupe abélien d'ordre 77 est cyclique.

Exercice 17 (Groupe finis résolubles)

1. On rappelle que le centre d'un p-groupe n'est jamais réduit à $\{e\}$. Montrer par récurrence qu'un p-groupe est toujours résoluble.
2. Soient p, q deux nombres premiers distincts. Montrer qu'un groupe de cardinal pq est toujours résoluble. (Supposer $p > q$ et considérer un p-Sylow)
3. Soit G un groupe d'ordre 12. Montrer que G est résoluble (en supposant les 3-Sylow non distingués, compter le nombre d'éléments d'ordre 3).
4. Soient p, q deux nombres premiers distincts. Montrer qu'un groupe de cardinal p^2q est toujours résoluble.

Exercice 18

Soit G un groupe.

1. Montrer que R, S sont des sous-groupes résolubles G avec $R \triangleleft G$ alors RS est résoluble.
2. En déduire que tout groupe fini possède un unique sous-groupe $\mathcal{R}(G)$ normal résoluble et maximal pour ces propriétés.
3. Montrer que $G/\mathcal{R}(G)$ n'a pas de sous-groupe normal et résoluble.

Exercice 19

Soit G un groupe fini. Montrer l'alternative suivante : G contient un sous-groupe normal non-trivial abélien ou bien G contient un sous-groupe normal non-trivial parfait (i.e $H = D(H)$).

Exercice 20

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- Tout groupe d'ordre impair est résoluble.
- Tout groupe fini simple non-abélien est d'ordre pair.

Le théorème de Feit-Thompson (1962) montrent qu'elles sont vraies.