Théorie des Groupes et Géométrie

Contrôle Continu n°3 :
Groupes et Géométrie
Deux heures

ATTENTION : Rédiger les deux parties sur des copies distinctes.

Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité du contrôle pour avoir la note maximale.
Les notes de cours, de TD et tous les appareils connectés sont interdits.

Partie I

Questions de cours

On justifiera avec soin chaque réponse. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X.

1. Exprimer les cardinaux $\#X$ et $\#G$ en fonction des cardinaux des orbites et des stabilisateurs.

Soit p un nombre premier. On suppose que G est un p-groupe.

2. Rappeler la définition d'un p-groupe.
3. En faisant agir G par conjugaison sur lui-même, montrer que le centre de G n'est pas trivial.
4. Énoncer le théorème de Pappus. Faire la figure correspondante.
5. Énoncer le dual du théorème de Pappus. Faire la figure correspondante.

Exercice 1

Soit G un groupe. Si H et K sont deux sous-groupes de G, la notation $[H, K]$ désigne le sous-groupe de G engendré par tous les commutateurs $[h, k] = hkh^{-1}k^{-1}$ pour $h \in h$ et $k \in K$. En particulier, le groupe dérivé de G est $D(G) = [G, G]$, et si $i \geqslant 0$ alors $D^{i+1}(G) = D(D^i(G)) = [D^i(G), D^i(G)]$ (avec $D^0(G) = G$).

1. Soient H, H' et K, K' des sous-groupes de G. Si $H \leqslant H'$ et $K \leqslant K'$, montrer que $[H, K] \leqslant [H', K']$.

On définit la suite de sous-groupes $(C^i(G))_{i\geqslant 0}$ de G par $C^0(G) \coloneqq G$ et

$$C^{i+1}(G) \coloneqq [C^i(G), G],$$

pour tout $i \geqslant 0$. On dit que G est *nilpotent* si $C^i(G) = \{1\}$ pour un certain i.

2. Montrer que si G est nilpotent alors $C^i(G) = \{1\}$ pour i assez grand.
3. Montrer que les groupes abéliens sont nilpotents.
4. (a) Montrer que $D^i(G) \leqslant C^i(G)$ pour tout $i \geqslant 0$.
   (b) En déduire qu'un groupe nilpotent est résoluble.
5. (a) Montrer que $\mathfrak{S}_3$ est résoluble.
   (b) Montrer que $\mathfrak{S}_3$ n'est pas nilpotent.
   (c) Qu'en déduit-on ?

Partie II

Exercice 2

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

1. Vérifier l'égalité suivante :
$$(a-c)(b-d) = (a-b)(c-d) + (a-d)(b-c)$$
2. Soient $u, v \in \mathbb{C}^\times$. Redémontrer soigneusement que :
$$|u+v| = |u| + |v| \quad \Rightarrow \quad u/v \in \mathbb{R}_+^\times$$
3. Soient a, b, c, d 4 points distincts de $\mathbb{C}$. On note xy la distance entre x et y, autrement dit $xy = |x-y|$. Montrer que l'on a les équivalences suivantes :
   (a) $ac \cdot bd = ab \cdot cd + ad \cdot bc$
   (b) $[a, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, d]$ est un réel strictement négatif.
   (c) Les points a, b, c, d sont soit :
      i. cocycliques et le quadrilatère $abcd$ est convexe ;
      ii. alignés, les points b et d étant l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur du segment $[ac]$.

Exercice 3

Soit k un corps algébriquement clos.

1. Montrer que l'application canonique $\mathrm{SL}_2(k) \to \mathrm{PGL}_2(k)$ est surjective.
2. Calculer son noyau. En déduire que $\mathrm{PSL}_2(k) \simeq \mathrm{PGL}_2(k)$.

Soit N un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_2(k)$ contenant strictement le centre de $\mathrm{GL}_2(k)$.

3. Montrer que N contient une transvection. *On pourra distinguer le cas N contient une matrice non-diagonalisable, du cas N contient une matrice diagonalisable qui n'est pas une homothétie.*
4. En déduire que $N \supset \mathrm{SL}_2(k)$.
5. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(k)$ est simple.

Exercice 4

Soit H un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$. On veut montrer que $H \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$.

1. Montrer ce résultat lorsque $n = 2, 3, 4$.

On suppose à présent $n \geqslant 5$. On va étudier l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_n/H$ par translation à gauche, c'est à dire que si $g \in \mathfrak{S}_n$ et $x = kH \in \mathfrak{S}_n/H$ alors $g \cdot x = gkH$. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{S}_n$ des représentants des classes à gauche de H. On suppose que $a_1 = \mathrm{Id} \in \mathfrak{S}_n$.

2. Montrer que le noyau de l'action $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_n/H$ est inclus dans H.
3. En déduire que cette action est fidèle.
4. En déduire un isomorphisme entre H et $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Exercice 5

Soit k un corps fini de cardinal q.

1. Calculer le cardinal de $\mathrm{GL}_n(k)$.
2. Calculer le cardinal de $\mathrm{PGL}_n(k)$ et $\mathrm{SL}_n(k)$.
3. En déduire que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ et $\mathfrak{S}_5$ ont le même cardinal.
4. En utilisant l'action naturelle de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ construire un sous-groupe K d'indice 6 de $\mathfrak{S}_6$ tel que l'action de K sur $\{1, \ldots, 6\}$ est transitive.
5. En déduire l'existence d'un sous-groupe d'indice 6 de $\mathfrak{S}_6$ isomorphe à $\mathfrak{S}_5$ qui n'est pas conjugué au stabilisateur de l'élément 1.

Note pour plus tard : Pour $n \neq 6$, tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est conjugué au stabilisateur de 1.