Théorie des Groupes et Géométrie

Contrôle Continu n°2 :
Groupes et Géométrie
Une heure

Questions de cours

On justifiera avec soin chaque réponse.

1. (a) Retrouver le cardinal de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$.
   (b) En faisant agir fidèlement $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ sur un ensemble à quatre éléments, montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$.
2. Soient x, y, z, t quatre points distincts d'une droite projective. Montrer que $[x, y, t, z] = [x, y, z, t]^{-1}$ (on pourra par exemple utiliser la formule explicite du birapport).

Exercice 1

Soit k un corps. Une *involution* de $\mathbb{P}^1(k)$ est une homographie $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1(k)}$ telle que $g^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1(k)}$.

1. Montrer qu'une homographie g de $\mathbb{P}^1(k)$ est une involution si et seulement s'il existe $p \neq q \in \mathbb{P}^1(k)$ tels que $g(p) = q$ et $g(q) = p$.
2. Soient p_1, p_2, p_3 (respectivement q_1, q_2, q_3) trois points distincts de $\mathbb{P}^1(k)$ avec $(p_1, p_2, p_3) \neq (q_1, q_2, q_3)$. Soit f l'unique homographie de $\mathbb{P}^1(k)$ qui envoie chaque p_i sur q_i pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Montrer que f est une involution si et seulement si
$$[p_1, p_2, p_3, q_i] = [q_1, q_2, q_3, p_i],$$
pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

On suppose maintenant que k est de caractéristique différente de 2. Soit g une involution de $\mathbb{P}^1(k)$ possédant un point fixe.

3. Montrer que g possède exactement deux points fixes. On note a, b ces points fixes.
4. Montrer que pour tout point $m \in \mathbb{P}^1(k) \setminus \{a, b\}$ on a $[a, b, m, g(m)] = -1$.

Exercice 2

Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites d'un plan projectif. Soient A, B, C trois points de $\mathcal{D}$ et A', B', C' trois points de $\mathcal{D}'$. On note $u = (BC') \cap (B'C)$, $v = (CA') \cap (C'A)$ et $w = (AB') \cap (A'B)$. Le but de l'exercice est de montrer que les points u, v, w sont alignés à l'aide de perspectives.

1. Rappeler le nom de cet énoncé.

   On note $p_1 : (BC') \to \mathcal{D}'$ la perspective de centre C de (BC') vers $\mathcal{D}'$. On note $p_2 : \mathcal{D}' \to (A'B)$ la perspective de centre A de $\mathcal{D}'$ vers $(A'B)$. On note $f = p_2 \circ p_1$.
2. On note $M = (BC') \cap (A'C)$ et $N = (AC') \cap (A'B)$. Calculer $f(B)$, $f(M)$, $f(C')$ et $f(u)$.

   On note $q : (BC') \to (A'B)$ la perspective de centre v de (BC') vers $(A'B)$.
3. Calculer $q(B)$, $q(M)$ et $q(C')$.
4. En déduire $q(u)$.
5. Conclure.

Exercice 3

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ de centres O et O'. On dit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont *orthogonaux* lorsque $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{P, Q\}$ et que les tangentes D_P et D'_P à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en P sont orthogonales.

On suppose que la droite (OO') rencontre $\mathcal{C}$ en A, B et $\mathcal{C}'$ en M, N.

1. Montrer que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux si et seulement si $[A, B, M, N] = -1$.