Théorie des Groupes et Géométrie

Contrôle Continu n°1 :
Groupes et Géométrie
Une heure

Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité du contrôle pour avoir la note maximale. Les questions marquées d'une étoile sont probablement plus difficiles que les autres.

Questions de cours

1. Rappeler la définition d'un groupe résoluble.
2. Donner un plan (vague si nécessaire) de la preuve du fait que $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geqslant 5$.

Exercice 1

On considère le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ suivant :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \middle| \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Sur un coin de feuille, noter proprement le résultat de la multiplication gh de deux éléments $g, h \in H$.

1. Si $g \in H$, calculer explicitement g^{-1}.
2. Si $g, h \in H$, calculer explicitement $[g, h]$.
3. Montrer que H est résoluble.

   On considère le sous-ensemble N de H donné par :

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \middle| \quad y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Montrer que N est un groupe, $N \triangleleft H$, $H/N \simeq \mathbb{R}$ et $N \simeq \mathbb{R}^2$. *Dans l'ordre que vous souhaitez.*
5. En déduire une suite exacte **scindée** $1 \to \mathbb{R}^2 \to H \to \mathbb{R} \to 1$.

6*. Donner une suite exacte **non-scindée** $1 \to \mathbb{R} \to H \to \mathbb{R}^2 \to 1$.

Exercice 2

Soit G un groupe d'ordre $455 = 5 \cdot 7 \cdot 13$. Si p est un nombre premier, on note s_p le nombre de p-sylow de G.

1. Montrer que $s_{13} = s_7 = 1$.
2. En déduire une suite exacte $1 \to N \to G \to K \to 1$ où N est un groupe d'ordre 91 et K un groupe d'ordre 5. Montrer que cette suite exacte est scindée.

3*. Montrer que G est une extension triviale de N et K.

3. Montrer que G est cyclique.

Exercice 3

Soit σ la permutation de $\{1, \dots, n\}$ donnée par :

$$\sigma = (1\,2 \cdots n)$$

On note T le groupe engendré par σ.

1. Montrer que T agit transitivement sur $\{1, \dots, n\}$.
2. Montrer que le centralisateur de T dans $\mathfrak{S}_n$ est égal au groupe T.

3*. Déterminer le normalisateur de T.