Courbes et Surfaces Paramétrées

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

TD n°3 :
Courbe implicite

Exercice 1

1. Montrer que la relation :
$$x^4 + y^3 - 2x^2y - 1 = 0$$
définit implicitement y comme une fonction de x au voisinage du point $(0, 1)$.
2. Idem au voisinage de $(0, 0)$ pour la relation :
$$\sin y + y + e^x = 1$$
3. Idem au voisinage de $(0, 1)$ pour la relation :
$$x^3 + y^3 - 3xy = 1$$

Exercice 2

Montrer que la courbe implicite :

$$y^3 + (x^2 + 1)y + x^4 = 0$$

définit implicitement une fonction $\varphi : x \mapsto y$ définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. *Il est important de ne pas oublier que l'équation $x = \arctan y$ ne définit pas une fonction $x \mapsto y$ définie sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 3

On rappelle que toute conique non-dégénérée est donnée de façon implicite dans un repère orthonormée par :

$$ax^2 + by^2 = c \text{ ou } ax^2 + by = 0$$

avec a, b des nombres réels non nuls.

- Montrer qu'une ellipse non-circulaire ou une hyperbole possède deux axes de symétries, et que ces derniers sont orthogonaux.
- Montrer qu'une parabole possède un axe de symétrie.
- Montrer qu'une conique non-dégénérée est une courbe lisse.
- Étude de l'ellipse :

  - Montrer qu'une ellipse non-circulaire possède exactement quatre points dont les tangentes sont orthogonales à un axe.
  - Est-ce que ses points vérifient des propriétés métriques particulières.
  - En déduire qu'une ellipse non-circulaire possède exactement deux axes de symétries.
  - Définir deux segments "grand axe" et "petit axe". Vérifier qu'une ellipse est caractérisée par la donnée de ses deux segments.
- Étude de l'hyperbole
  - Montrer qu'une hyperbole possède deux points dont les tangentes sont orthogonales à un axe.
  - Est-ce que ses points vérifient des propriétés métriques particulières.
  - Montrer qu'une hyperbole possède deux asymptotes.
  - En déduire qu'une hyperbole possède exactement deux axes de symétries.
  - Parmi toutes les hyperboles, distinguer une famille plus symétrique que les autres.
  - Quelle donnée permet de caractériser une hyperbole ?
- Étude de la parabole
  - Montrer qu'une parabole possède un point dont la tangente est orthogonale à un axe.
  - Est-ce que ses points vérifient des propriétés métriques particulières.
  - Montrer qu'une parabole possède une branche parabolique dont on exhibera la direction.
  - En déduire qu'une parabole de possède qu'un axe de symétrie.
  - Quelle donnée permet de caractériser une parabole ?

Exercice 4

Etudier* les coniques suivantes :

$$x^2 + 2y^2 = 4 \qquad x^2 - 3y^2 = 1 \qquad x^2 + 2x + y = 0$$

$$x^2 + xy + y^2 = 1 \qquad 2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1 \qquad x^2 + 2xy + y^2 = 1$$

* C'est à dire, pour chaque conique, chercher ses axes de symétrie, les points dont les tangentes sont orthogonales aux axes de symétrie, les asymptotes. Tracer. *Un changement de repère peut aider mais n'est pas nécessaire.*

Exercice 5

Soit P un polynôme de degré n, scindé à racines simples, dont le coefficient dominant est 1.

1. Rappeler la forme de P à l'aide de ses racines.
2. Tracer grossièrement $x \mapsto P(x)$.
3. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ définie implicitement par $y^2 = P_n(x)$ est lisse.
4. Chercher les symétries de $\mathcal{C}$.
5. Calculer la tangente aux points d'ordonnées nulles.
6. Trouver les points dont la tangente est verticale.
7. Chercher grossièrement (i.e. trouver un encadrement des abscisses) des points dont la tangente est horizontale.
8. Tracer grossièrement $\mathcal{C}$. On étudiera les intersections de $\mathcal{C}$ avec les droites horizontales et verticales.

Exercice 6

Soient F, F' deux points du plan et $\lambda > 0$. On considère les ensembles :

$$\mathcal{E}_\lambda = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid MF + MF' = \lambda\} \qquad \mathcal{H}_\lambda = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid |MF - MF'| = \lambda\}$$

On admet que $\mathcal{E}_\lambda, \mathcal{H}_\lambda$ sont des coniques.

1. Déterminer leurs natures et leurs axes de symétrie.
2. On note $E : M \mapsto MF + MF'$. Montrer que :
$$\nabla E_M = \frac{\overrightarrow{FM}}{FM} + \frac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}$$
3. En déduire que si M est un point sur $\mathcal{E}_\lambda$ alors la première bissectrice[1] de l'angle $\widehat{FMF'}$ est orthogonale à la tangente à $\mathcal{E}_\lambda$ en M.
4. On note $H : M \mapsto MF - MF'$. Montrer que :
$$\nabla H_M = \frac{\overrightarrow{FM}}{FM} - \frac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}$$
5. En déduire que si M est un point sur $\mathcal{H}_\lambda$ alors la première bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$ est la tangente à $\mathcal{H}_\lambda$ en M.

1. La bissectrice qui intersecte le segment $[FF']$

Exercice 7

Soient $a \geqslant b > 0$, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de l'équation :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

On note $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$, où c est l'unique réel > 0 tel que $a^2 = b^2 + c^2$.

1. On notant M le point (x, y). Montrer que $MF = a - c\cos t$ et $MF' = a + c\cos t$.
2. En déduire que $\mathcal{E}$ est incluse dans l'ensemble des solutions de l'équation du jardinier :
$$MF + MF' = 2a \qquad (\bigstar)$$
3. Réciproquement, montrer que toute solution de l'équation $(\bigstar)$ est sur l'ellipse $\mathcal{E}$. *On pourra commencer par montrer que l'équation $(\bigstar)$ est équivalente à l'équation suivante :*
$$(MF^2 + MF'^2 - 4a^2)^2 - 4MF^2MF'^2 = 0$$
Ensuite, on calculera en coordonnées.

Exercice 8

Soit $b > 0$. On cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_b$ des points $M = (x, y)$ du plan tels que :

$$\mathrm{dist}(M, -1) \cdot \mathrm{dist}(M, 1) = b$$

1. Ramener ce problème à la résolution d'une équation implicite de la forme $F(x, y) = b$.
2. Examiner les symétries du problème.
3. Montrer qu'en dehors de l'origine le gradient de F est non nul.
4. En déduire que les courbes $\mathcal{C}_b$ sont lisses sauf à priori $\mathcal{C}_1$ en l'origine.
5. On fixe une direction θ. Montrer que si on suppose que $M = \rho e^{i\theta}$ alors ρ est solution de l'équation :
$$\rho^4 + 2\cos(2\theta)\rho^2 + 1 - b^2 = 0$$
6. En déduire que $\mathcal{C}_1$ est une courbe que l'on a déjà croisé. En particulier, montrer qu'elle n'est pas lisse en l'origine.
7. Montrer que toutes ses courbes sont bornées.
8. Montrer que si $b > 1$ alors $\mathcal{C}_b$ est une courbe fermée simple.
9. Montrer que si $0 < b < 1$ alors $\mathcal{C}_b$ est l'union de deux courbes fermées simples.