Courbes et Surfaces Paramétrées

TD n°2 : Etude métrique des courbes

1 La longueur d'une courbe

Exercice 1

Calculer les longueurs des courbes suivantes :

1. une arche de cycloïde : $x = t - \sin(t)$, $y = 1 - \cos(t)$, voir figure 1.
2. une cardioïde : $\rho = 1 + \cos(\theta)$, voir figure 2.
3. un astroïde : $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$, voir figure 3.
4. un tour de spirale d'archimède : $\rho = \theta$, voir figure 4.
5. l'arc de $x = 1$ à $x = T$ de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.
6. de la néphroïde : $t \mapsto \Big(3\cos(t) - \cos(3t), 3\sin(t) - \sin(3t)\Big)$, voir figure 5.

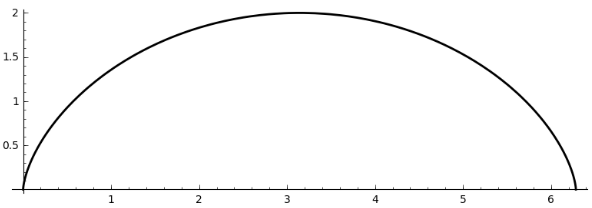


Fig. 1

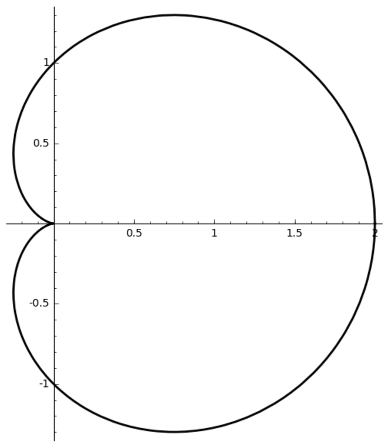


Fig. 2

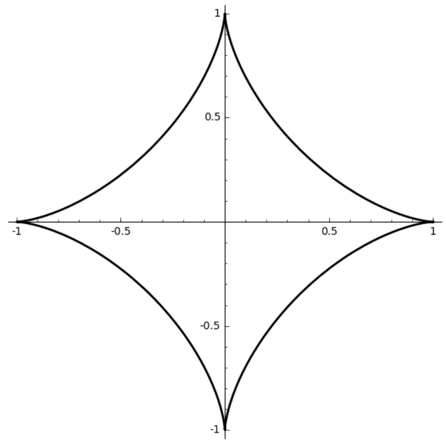


Fig. 3

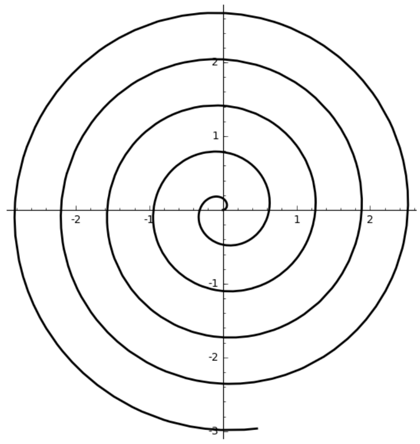


Fig. 4

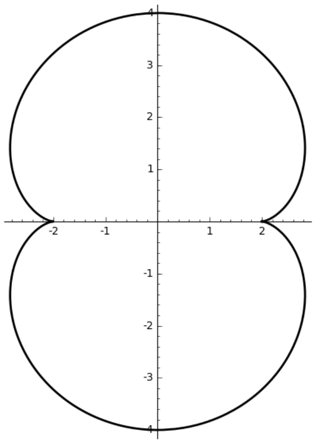


Fig. 5.

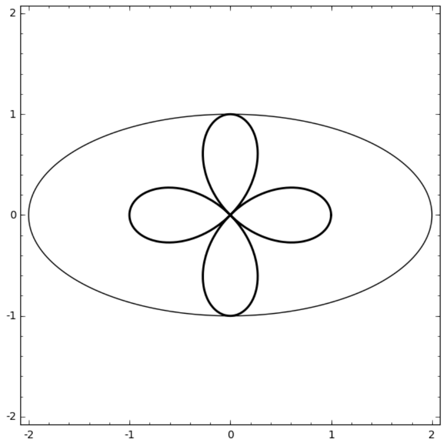


Fig. 6.

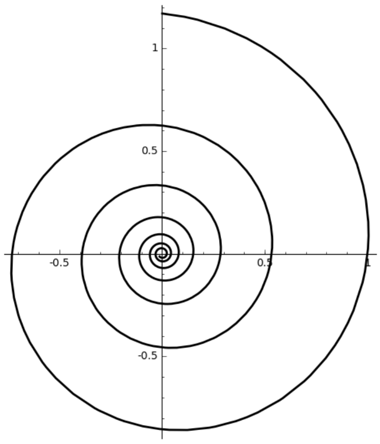


Fig.7

Exercice 2

Montrer que les longueurs des deux courbes suivantes (voir Fig. 6.) sont égales :

- L'ellipse d'équation implicite $x^2 + 4y^2 = 4$
- Le trèfle à 4 feuilles de paramétrisation en polaire $\rho = \cos(2\theta)$.

2 La courbure

Exercice 3

Calculer la courbure des courbes suivantes :

- $\theta \mapsto \rho(\theta) = \theta^\alpha$, pour $\alpha > 0$, définie pour $\theta > 0$.
- La cycloïde.
- La cardioïde $\rho = 1 + \cos(\theta)$

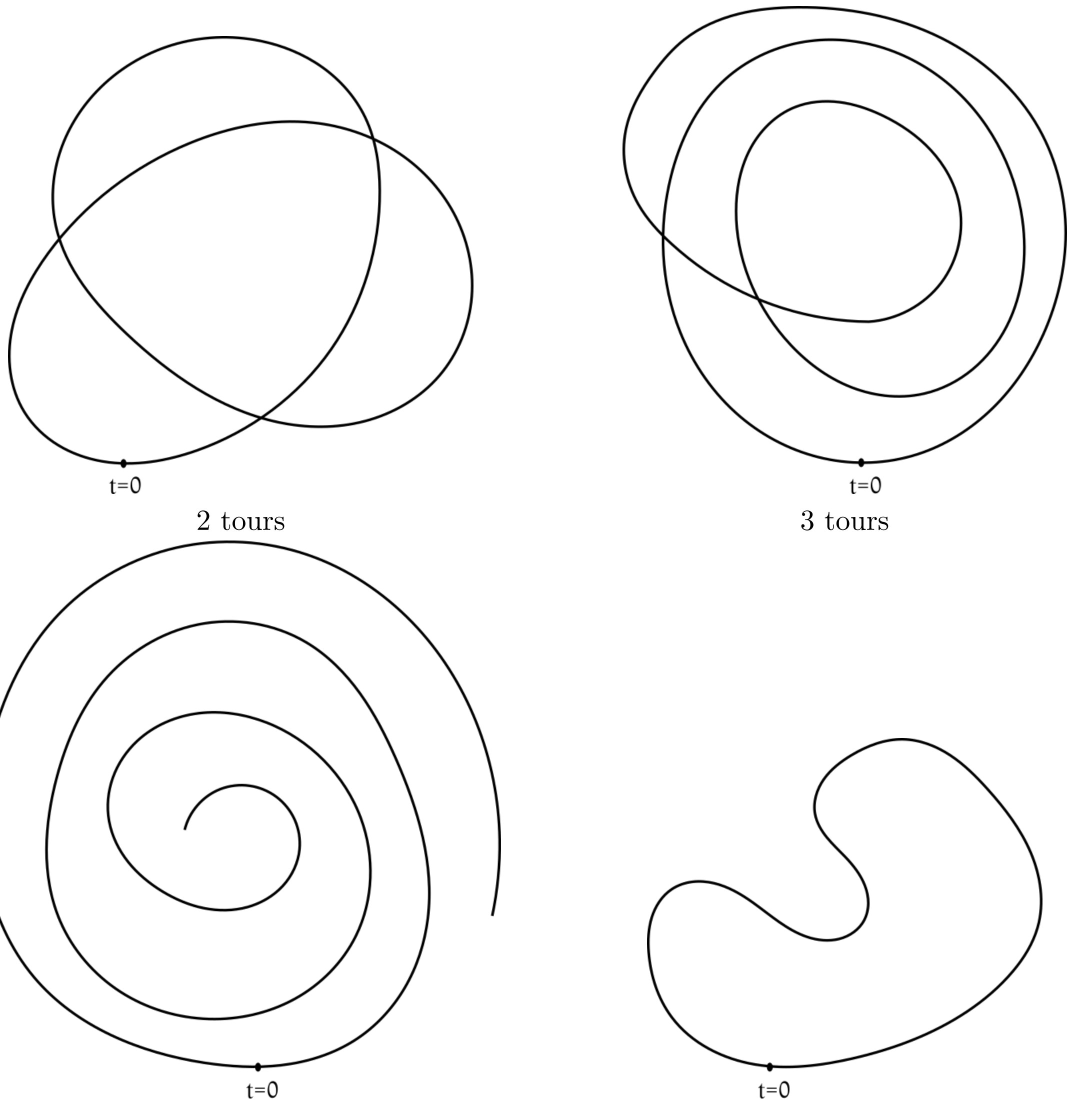
Exercice 4

On considère la courbe f donnée par $t \mapsto (t, \ln(t))$.

1. Déterminer l'ensemble de départ de f.
2. Calculer le rayon R de courbure f en tout point.
3. Etudier et calculer les extrema de $t \mapsto |R(t)|$.

Exercice 5

Les 4 courbes dessinées dans la Figure 4-courbes sont parcourues dans le sens trigonométrique en partant du point indiqué $t = 0$. Colorier en rouge les zones où la courbure est positive, en vert les zones où la courbure



2 tours — 3 tours — Une spirale — Un haricot

Figure 1 – 4 courbes

est négative. Lesquelles sont birégulières ? Dessiner grossièrement le graphe de la fonction $\alpha : I \to \mathbb{R}$, où I est l'intervalle de définition de la courbe, α est l'unique relevé de l'angle orienté $(Ox, \vec{T}) \in \mathbb{S}^1$ qui vérifie $\alpha(0) = 0$, en particulier déterminer $\alpha(I)$.

Exercice 6

Calculer un relevé $t \mapsto \alpha(t)$ de l'angle $(Ox, \vec{T})$ pour les courbes suivantes :

1. $t \mapsto (t, e^t)$
2. $t \mapsto (t, t^3)$
3. $t \mapsto (t \cos t, t \sin t)$
4. $\theta \mapsto 1 + \cos\theta$

Vérifier que l'obtient bien des difféomorphismes (en dehors éventuellement d'un nb fini de points que l'on précisera) comme prévu.

3 Développée et développante

Exercice 7

Soit $k > 0$. On considère la spirale logarithmique, voir figure 7, donnée en coordonnées polaires par

$\rho = e^{k\theta}$, autrement dit on étudie la courbe $\theta \mapsto z(\theta) = e^{(k+i)\theta}$.
L'utilisation des nombres complexes simplifie grandement les calculs.

1. Calculer le repère de Frenet, $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$.
2. En déduire les angles $\alpha = (Ox, \overrightarrow{T})$ et $(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{T})$. Interpréter.
3. Calculer la courbure au point de paramètre θ.
4. En déduire une paramétrisation de la développée (lieu des centres de courbures) de la spirale logarithmique. Reconnaitre la courbe obtenue.

Exercice 8

Si γ une courbe birégulière de classe $\mathcal{C}^2$, alors on note s son abscisse curviligne et R son rayon de courbure. Trouver toutes les courbes qui vérifient l'équation intrinsèque :

1. $R = 1 + s^2$.
2. $R = \sqrt{1 - s^2}$.

Indication : Commencer par calculer explicitement $s \mapsto \alpha(s)$, en déduire $s \mapsto (x'(s), y'(s))$, intégrer pour obtenir $s \mapsto (x(s), y(s))$. Enfin, chercher à reparamétriser, si besoin, pour reconnaître une courbe classique.

Exercice 9

1. Calculer une paramétrisation de la développée d'une chainette (i.e. $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$).
2. Calculer une paramétrisation de la développante d'une chainette (i.e. $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$). *La courbe obtenue s'appelle la tractrice.*
3. Montrer qu'une cycloïde, sa développée et sa développante diffèrent entre elles d'une translation.
4. Montrer qu'une astroïde et sa développée (lieu des centres de courbures) diffèrent d'une similitude.

4 Pour aller plus loin

Exercice 10

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple de longueur L de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée par la longueur d'arc. On suppose que γ tourne autour d'un point intérieur dans le sens trigonométrique (Cf le théorème de Jordan). On dit que γ est convexe si pour tout points p, q dans l'image de γ, le segment ouvert $]p, q[$ est dans l'intérieur de γ.

1. Montrer que si la courbure de γ change de signe en x_0 alors le point x_0 est un point d'inflexion de γ.
2. Montrer qu'une courbe convexe n'admet pas de points d'inflexion.
3. En déduire que si γ est convexe alors la courbure de γ est positive ou nulle.
4. Réciproquement, montrer que si la courbure de γ est positive ou nulle alors γ est convexe.
5. Montrer que $\displaystyle\int_0^L \kappa(s) ds = 2\pi$ (sans hypothèse de convexité sur γ).
   Ind : Utiliser l'angle $\alpha = (Ox, \overrightarrow{T})$.

   Sans supposer γ convexe, on appelle *courbure totale* la quantité $\displaystyle\int_0^L |\kappa(s)| ds \geqslant 2\pi$, de γ.
6. En déduire l'inégalité suivante et son cas d'égalité :

   $$\int_0^L |\kappa(s)| ds \geqslant 2\pi$$

   avec égalité si et seulement si γ est convexe.