Courbes et Surfaces Paramétrées

TD n°1 : Courbe planaire en coordonnées cartésiennes et polaires

1 Étude de courbes en coordonnées cartésiennes

Exercice 1

Étudier les courbes paramétrées suivantes :

1. $\begin{cases} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{cases}$

   Courbe de Lissajous ($p = 2$, $q = 3$)

2. $\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = \cos(t) \end{cases}$

   Cycloïde

3. $\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 2t^2 - t^4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ y = \dfrac{t^3 - t}{t^2 + 1} \end{cases}$

   Trisectrice de Maclaurin

5. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1 + t^3} \end{cases}$

   Folium de Descartes

6. $\begin{cases} x = t\ln(t) \\ y = \ln(t)/t \end{cases}$

   Chercher les points d'inflexions

7. $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^t/t \end{cases}$

   Chercher les points d'inflexions

8. $\begin{cases} x = \sin(t) \\ y = \tan(t)(1 - \sin(t)) \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \cos(t/3) + \sin(t/3) \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \cos(t) + \cos(3t) \\ y = \sin(t) + \sin(3t) \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \displaystyle\int_0^t \cos(u^2)du \\ y = \displaystyle\int_0^t \sin(u^2)du \end{cases}$

    Clothoïde ou Spirale de Cornu

Exercice 2

Montrer que la courbe définie par $\begin{cases} x = 3t^3 + 2t^2 - t - 1 \\ y = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$ admet un unique point double. Déterminer ce point, ainsi que les tangentes correspondantes. Tracer la courbe.

Recommencer avec la courbe définie par $\begin{cases} x = t^2 + t^3 \\ y = t^4 + t^5 \end{cases}$

2 Étude de courbes en coordonnées polaires

Exercice 3

Étudier les courbes en polaire suivantes :

1. $\rho = 1$
2. $\rho = \sin(\theta)$
3. $\rho = \sin(2\theta)$
4. $\rho = \sin(n\theta)$ pour $n \in \mathbb{N}*$ en distinguant les cas n pair et n impair.
5. $\rho = 1 + \cos(\theta)$
   Cardioïde
6. $\rho = 1/2 + \cos(\theta)$
   Limaçon de Pascal
7. $\rho = a + \cos(\theta)$ avec $1 < a < 2$.
   Limaçon de Pascal
8. $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$
   Lemniscate de Bernoulli

Exercice 4

Étudier les courbes en polaire suivantes :

1. $\rho = \dfrac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos(\theta)^3 + \sin(\theta)^3}$
2. $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$
3. $\rho = 1 + \cos(4\theta) + \sin(4\theta)^2$
4. $\rho = \dfrac{\theta}{\theta - \pi}$
5. $\rho = \dfrac{\sin(3\theta)}{\sin\theta}$
6. $\rho = \dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \cos\theta}$

Exercice 5

Étudier les courbes en polaire suivantes, définies pour $\theta > 0$:

1. $\rho = \theta$
2. $\rho = \sqrt{\theta}$
3. $\rho = 2^\theta$

3 Pour s'entrainer

Exercice 6

(Les Épicycloïdes) Soit $\mathcal{U}$ un cercle fixe de rayon 1, et n un entier non nul. Soit C un cercle de rayon $\frac{1}{n}$ qui roule sans glisser à **l'extérieur** de $\mathcal{U}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la courbe décrite par un point de C.
   Ind : $t \mapsto \frac{1}{n}\Big((n+1)e^{it} - e^{i(n+1)t}\Big)$
2. Étudier et tracer le cas $n = 1$ (cardioïde).
3. Étudier et tracer le cas $n = 2$ (néphroïde).

Exercice 7

(Les Hypocycloïdes) Soit $\mathcal{U}$ un cercle fixe de rayon 1, et n un entier non nul. Soit C un cercle de rayon $\frac{1}{n}$ qui roule sans glisser à **l'intérieur** de $\mathcal{U}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la courbe décrite par un point de C.
   Ind : $t \mapsto \frac{1}{n}\Big((n-1)e^{it} - e^{i(n-1)t}\Big)$
2. Étudier et tracer le cas $n = 2$.
3. Étudier et tracer le cas $n = 3$ (deltoïde).
4. Étudier et tracer le cas $n = 4$ (astroïde). Déterminer une propriété remarquable des tangentes à l'astroïde.