Courbes et Surfaces Paramétrées

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Examen 2^{eme} Session
Vendredi 14 juin, 8h-10h
Durée : Deux heures

L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit. La clarté, le soin et la concision font partie de la notation.

Questions de Cours

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière paramétrée par l'abscisse curviligne, de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $0 \in I$ et $\gamma'(0) = (1,0)$. On note $s \mapsto T(s)$ le vecteur tangent unitaire à la courbe γ au point de paramètre s.

1. Donner la définition de la courbure de γ au point de paramètre s.

2. Donner une formule pour la calculer, la plus simple possible.

3. On note $s \mapsto \alpha(s)$ l'unique relevé continue de T qui vérifie $\alpha(0) = 0$. Que signifie cette phrase ?

4. Quelle formule relie α et la courbure de γ ?

5. La redémontrer.

Exercice 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{où} \quad x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe quelle définie.

1. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$. En déduire un intervalle d'étude I.

2. Dresser le tableau de variation de x et y sur I. *En cas d'échec à la question 1., étudier sur* $\mathbb{R}$

3. Tracer les tangentes importantes à $\mathcal{C}$.

4. Étudier les branches infinies éventuelles de $\mathcal{C}$.

5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

Bonus Quel est le nom de cette courbe ?

Exercice 2

On considère la fonction $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\theta \mapsto \sqrt{\cos(2\theta)}$. On note Γ la courbe dont la paramétrisation en coordonnées polaires est donnée par ρ.

1. **a.** Donner le domaine de définition D de ρ.

b. Étudier la périodicité et les symétries de Γ. En déduire un intervalle d'étude J de ρ.

c. Dresser le tableau de variation de ρ sur J.

d. Tracer les tangentes importantes à Γ.

e. Tracer Γ.

2. On considère les vecteurs $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $v_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$. On note $f : D \to \mathbb{R}^2$, la fonction donnée par $f(\theta) = \rho(\theta)u_\theta$.

a. Calculer la norme de $f'(\theta)$, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}[$. Montrer que le vecteur tangent unitaire $\overrightarrow{T_\theta}$ à Γ au point de paramètre θ est : $\overrightarrow{T_\theta} = -\sin(2\theta)u_\theta + \cos(2\theta)v_\theta$, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}[$.

b. Pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}[$, calculer une mesure de l'angle $V = (u_\theta, \overrightarrow{T_\theta})$ puis en déduire, qu'une mesure de l'angle $\beta = (u_0, \overrightarrow{T_\theta})$ est $3\theta + \frac{\pi}{2}$.

c. On note ℓ la fonction $\ell : \theta \mapsto \int_0^\theta |f'(\theta)|d\theta$. Rappeler l'interprétation de ℓ. Donner le domaine de définition de ℓ.

d. Pourquoi ℓ est un difféomorphisme de $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\to]-L, L[$, où $L = \ell(\frac{\pi}{4})$? Rappeler l'interprétation géométrique de L.

e. On considère la fonction $\alpha = \beta \circ \ell^{-1} :]-L, L[\to \mathbb{R}$. Rappeler l'interprétation géométrique de α puis de α'.

f. En déduire que la courbure de Γ au point de paramètre θ est :

$$3\sqrt{\cos(2\theta)}.$$

3. **a.** Rappeler la formule qui donne la courbure de Γ au point de paramètre θ à l'aide de ρ et de ses dérivées.

b. Calculer la courbure de Γ au point de paramètre θ.