Courbes et Surfaces Paramétrées

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Examen 1^{ere} session : mardi 30 avril
Durée : Deux heures

L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit. La clarté, le soin et la concision font partie de la notation.

Questions de Cours

1. Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Le graphe de ψ définit une courbe paramétrée g du plan $\mathbb{R}^2$. Rappeler la définition de g. Quelle est la courbure de g en un point t_0 qui vérifie $\psi'(t_0) = 0$?

2. Quelle est la direction de la tangente à une courbe donnée en coordonnées polaires par une fonction $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ en un point de paramètre θ_0 tel que $\rho(\theta_0) = 0$?

Bonus. Démontrer l'affirmation précédente.

3. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. On considère la courbe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$$

a. A quelle condition sur φ la courbe f est-elle régulière ? birégulière ?

b. Sous ces conditions, calculer la courbure et la torsion de f au point de paramètre t. *On simplifiera les expressions obtenues.*

c. Trouver une surface de $\mathbb{R}^3$ contenant la courbe f, donner une équation de cette surface et son nom.

Exercice 1

Soit $a > 1$. On considère la courbe $\mathcal{C}$ donnée en coordonnées polaires par :

$$\rho(\theta) = a - \cos\theta$$

1. *Étude de la courbe $\mathcal{C}$.*

a. Montrer que $\mathcal{C}$ est une courbe périodique.

b. Trouver l'axe de symétrie de la courbe. En déduire un intervalle d'étude J de ρ.

c. Dresser le tableau de variation de ρ sur J.

d. Tracer les tangentes importantes à $\mathcal{C}$, en justifiant leurs positions.

e. Pour les valeurs $a = \frac{3}{2}$ et $a = \frac{5}{2}$, placer les points étudiés précédemment ainsi que leurs tangentes sur deux dessins, ainsi que deux autres points au choix que vous placerez sans nécessairement calculer les tangentes.

2. *Étude de la position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente en $\theta = 0$, en fonction de a.*
   - **a.** Écrire le développement limité de la fonction $x : \theta \mapsto \rho(\theta)\cos(\theta)$ en $\theta = 0$ à l'ordre 2.
   - **b.** On suppose pour cette question $a \neq 2$. Déduire de la question précédente, la position de la courbe $\mathcal{C}$ relativement à sa tangente en $\theta = 0$, en distinguant les cas $a > 2$ et $a < 2$.
   - **c.** Tracer $\mathcal{C}$ sur J d'une couleur, puis compléter le tracé avec une autre couleur, pour les valeurs $a = \frac{3}{2}$ et $a = \frac{5}{2}$.

Bonus. Quelle est la position de $\mathcal{C}$ relativement à sa tangente en $\theta = 0$, lorsque $a = 2$?

3. *Étude métrique de la courbe $\mathcal{C}$.*
   - **a.** Obtenir une expression simple et concise de la fonction :

$$g : \theta \mapsto 2\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2 - \rho(\theta)\rho''(\theta).$$

   - **b.** En déduire le signe de la courbure de $\mathcal{C}$ sur J, on distinguera les cas $a > 2$, $a = 2$ et $a < 2$.
   - **c.** Revoir les tracés de la question 7, si nécessaire.

Exercice 2

On considère $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x, y) = x^4 - y^4 + 1$$

On va étudier la courbe :

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

1. Étudier les symétries de F, en déduire deux axes de symétrie de $\mathcal{C}$.
2. *Étude différentielle de la courbe $\mathcal{C}$.*
   - **a.** Calculer ∇F le gradient de F.
   - **b.** Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ est lisse.
   - **c.** Déterminer les deux points de $\mathcal{C}$ qui admettent une tangente horizontale.
   - **d.** Déterminer les points de $\mathcal{C}$ qui admettent une tangente verticale.
3. Soient $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Calculer le nombre de points des ensembles suivants :
   - $V_{x_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0 \text{ et } x = x_0\}$
   - $H_{y_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0 \text{ et } y = y_0\}$
4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C} \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ est le graphe d'une fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ que l'on explicitera.
5. *Étude des asymptotes de la courbe $\mathcal{C}$.*
   - **a.** Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas bornée.
   - **b.** En utilisant la question 4., trouver les asymptotes de $\mathcal{C}$. *En cas d'échec à la question 4. , montrer que si (x_n, y_n) est une suite de points de $\mathcal{C}$ tels que $x_n^2 + y_n^2 \to +\infty$ alors $|x_n| \to +\infty$, $|y_n| \to +\infty$ et $|\frac{x_n}{y_n}| \to 1$. En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}$.*
6. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.