Courbes et Surfaces Paramétrées

CC n°2 : Jeudi 28 mars
Durée : Une heure

L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdits. La clarté, le soin et la concision font partie de la notation.

Questions de Cours

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière paramétrée par l'abscisse curviligne, de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $0 \in I$ et $\gamma'(0) = (1,0)$. On note $s \mapsto T(s)$ le vecteur tangent unitaire à la courbe γ au point de paramètre s.

1. Donner la définition de la courbure de γ au point de paramètre s.

2. Donner une formule pour la calculer, la plus simple possible.

3. On note $s \mapsto \alpha(s)$ l'unique relevé continue de T qui vérifie $\alpha(0) = 0$. Que signifie cette phrase ?

4. Quelle formule relie α et la courbure de γ ?

5. La redémontrer.

Exercice 1

On considère la courbe paramétrée :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (4\cos^3(t), 4\sin^3(t)) \end{array}$$

1. *Tracé de la courbe définie par f.*

a. Étudier la périodicité et les symétries de f. En déduire un intervalle d'étude de f.

b. La courbe définie par f est-elle régulière ? Si ce n'est pas le cas, on précisera les temps des points stationnaires et on cherchera une tangente à la courbe en ses points (il existe une solution peu calculatoire à ce problème...).

c. Étudier f sur l'intervalle d'étude.

d. Placer les tangentes importantes et tracer la courbe.

Bonus Quel est le nom de cette courbe ?

2. *Étude métrique de la courbe définie par f.* **On se restreint à l'intervalle** $[0, \frac{\pi}{2}]$. Pour simplifier l'étude, considérons la courbe :

$$z : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 3e^{it} + e^{-3it} \end{array}$$

On admet (voir dernière question) les formules de trigonométrie suivantes :

$$4\cos^3(t) = 3\cos(t) + \cos(3t) \qquad 4\sin^3(t) = 3\sin(t) - \sin(3t)$$

qui montre que l'étude de z et f sont équivalentes. On note comme dans le cours les quantités :

$$T, N, \alpha, \kappa, R$$

qui désignent respectivement le vecteur tangent unitaire, la normale, le relevé de l'angle avec l'horizontale, la courbure et le rayon de courbure de la courbe z.

a. Montrer que, pour tout t :

$$T(t) = -e^{-it} \qquad\qquad |z'(t)| = 6\sin(2t)$$

b. Calculer la longueur de la courbe.

c. Montrer que l'unique relevé continue α de T qui vérifie $\alpha(0) = \pi$ est donnée par $\alpha(t) = -t+\pi$.

On note $t \mapsto \ell(t)$ la primitive de $t \mapsto |z'(t)|$ qui vaut 0 en 0. On note $\beta = \alpha \circ \ell^{-1}$.

d. Justifier la définition de β. Qui est β ?

e. À l'aide de la question de cours 4. et de l'égalité $\alpha = \beta \circ \ell$, montrer que :

$$R(t) = -6\sin(2t)$$

f. En déduire les extremums de R et leurs valeurs.

3. *Étude de la développée de la courbe définie par f*, i.e. du lieu des centres de courbure.

On note ω la développée de z donnée par la formule $\omega(t) = z(t) + R(t)N(t)$.

a. Montrer que :

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad \omega(t) = 2(3e^{it} - e^{-3it})$$

b. On pose $r_8 = e^{\frac{i\pi}{4}}$. Montrer que :

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad \omega(t) = 2r_8\ z(t - \pi/4)$$

c. Montrer que cette formule est valide sur $\mathbb{R}$.

d. Interpréter géométriquement sa signification.

4. Bonus. Démontrer les formules de trigonométrie admises. Ce bonus ne comptera que si vous avez étudié suffisament les questions précédentes.