Chapitre 1: le

IV) Valeur absolue

Définition

Si $x, y \in \mathbb{R}$, *on note* $\max(x, y)$ *le plus grand de ses deux réels, et* $\min(x, y)$ *le plus petit.*

Exemples

$$\max(-2, 3) = 3; \quad \min(1, 27) = 1.$$

IV) Valeur absolue

Définition

Si $x, y \in \mathbb{R}$, on note $\max(x, y)$ le plus grand de ses deux réels, et $\min(x, y)$ le plus petit.

Exemples

$$\max(-2, 3) = 3; \quad \min(1, 27) = 1.$$

Définition (Valeur absolue)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit

$$|x| = \max(x, -x), \quad x_+ = \max(x, 0), \quad x_- = \max(-x, 0).$$

La quantité $|x|$ s'appelle la valeur absolue de x. Les quantités x_+ et x_- s'appellent respectivement la partie positive et la partie négative de x.

IV) Valeur absolue

Définition

Si $x, y \in \mathbb{R}$, on note $\max(x, y)$ le plus grand de ses deux réels, et $\min(x, y)$ le plus petit.

Exemples

$$\max(-2, 3) = 3; \quad \min(1, 27) = 1.$$

Définition (Valeur absolue)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit

$$|x| = \max(x, -x)\,, \quad x_+ = \max(x, 0)\,, \quad x_- = \max(-x, 0)\,.$$

La quantité $|x|$ s'appelle la valeur absolue de x. Les quantités x_+ et x_- s'appellent respectivement la partie positive et la partie négative de x.

Il s'ensuit que

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Propriétés

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $|x|^2 = x^2$, $\quad |xy| = |x||y|$

Remarque

Géométriquement, $|x|$ *est la distance entre le point* x *et l'origine sur la droite réelle ; et* $|x-y|$ *est la distance entre les points* x *et* y *sur la droite réelle.*

Remarque

Géométriquement, $|x|$ *est la distance entre le point* x *et l'origine sur la droite réelle ; et* $|x-y|$ *est la distance entre les points* x *et* y *sur la droite réelle.*

Nous allons démontrer le résultat élémentaire suivant :

Proposition

Soit $x \in \mathbb{R}$, *alors on a la décomposition*

$$|x| = x_+ + x_- \,, \quad x = x_+ - x_- \,.$$

Remarque

Géométriquement, $|x|$ est la distance entre le point x et l'origine sur la droite réelle ; et $|x-y|$ est la distance entre les points x et y sur la droite réelle.

Nous allons démontrer le résultat élémentaire suivant :

Proposition

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors on a la décomposition

$$|x| = x_+ + x_- \,, \quad x = x_+ - x_- .$$

Démonstration.

On distingue deux cas suivant le signe de x.

- Si $x \geq 0$ alors :

$$|x| = x = x_+ \quad \text{et} \quad x_- = 0$$

- Si $x < 0$ alors :

$$|x| = -x = x_- \quad \text{et} \quad x_+ = 0$$

□

Exercice Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \qquad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Exercice Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \qquad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Inégalité triangulaire

Exercice Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}, \qquad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

Inégalité triangulaire

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \qquad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Inégalité triangulaire

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. On a : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

Exercice Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \qquad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Inégalité triangulaire

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. On a : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
2. On a l'égalité si et seulement si x, y sont de même signes.

Exercice Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \qquad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Inégalité triangulaire

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. On a : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
2. On a l'égalité si et seulement si x, y sont de même signes.

Démonstration.

$\square$

Exercice Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \qquad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Inégalité triangulaire

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. On a : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
2. On a l'égalité si et seulement si x, y sont de même signes.

Démonstration.

L'inégalité est vraie si et seulement si

$$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

$\square$

Exercice Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \qquad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Inégalité triangulaire

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. On a : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
2. On a l'égalité si et seulement si x, y sont de même signes.

Démonstration.

L'inégalité est vraie si et seulement si

$$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

ceci est équivalent à : $\cancel{x^2} + 2xy + \cancel{y^2} \leq \cancel{|x|^2} + 2|x||y| + \cancel{|y|^2}$, ou encore

$$xy \leq |x||y| = |xy|.$$

$\square$

Exercice Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \qquad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Inégalité triangulaire

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. On a : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
2. On a l'égalité si et seulement si x, y sont de même signes.

Démonstration.

L'inégalité est vraie si et seulement si

$$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

ceci est équivalent à : $\cancel{x^2} + 2xy + \cancel{y^2} \leq \cancel{|x|^2} + 2|x||y| + \cancel{|y|^2}$, ou encore

$$xy \leq |x||y| = |xy|.$$

Ceci est vrai car pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $t \leq |t|$.

□

Exercice Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \qquad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Inégalité triangulaire

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. On a : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
2. On a l'égalité si et seulement si x, y sont de même signes.

Démonstration.

L'inégalité est vraie si et seulement si

$$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

ceci est équivalent à : $\cancel{x^2} + 2xy + \cancel{y^2} \leq \cancel{|x|^2} + 2|x||y| + \cancel{|y|^2}$, ou encore

$$xy \leq |x||y| = |xy|.$$

Ceci est vrai car pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $t \leq |t|$.
On en déduit aussi qu'on a l'égalité ssi $xy \geq 0$. □

V) Bornes supérieures et inférieures

Définition

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *La borne supérieure de A, si elle existe, est le plus petit des majorants de A. On la note par $\sup A$ ou S. Concrètement, c'est l'unique majorant S tel que tout autre majorant M est forcément plus grand que S.*

v) Bornes supérieures et inférieures

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *La borne supérieure de A, si elle existe, est le plus petit des majorants de A. On la note par $\sup A$ ou S. Concrètement, c'est l'unique majorant S tel que tout autre majorant M est forcément plus grand que S.*
2. *La borne inférieure de A, si elle existe, est le plus grand des minorants de A. On la note par $\inf A$ ou I. Concrètement, c'est l'unique minorant I tel que tout autre minorant m est forcément plus petit que I.*

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *La borne supérieure de A, si elle existe, est le plus petit des majorants de A. On la note par $\sup A$ ou S. Concrètement, c'est l'unique majorant S tel que tout autre majorant M est forcément plus grand que S.*
2. *La borne inférieure de A, si elle existe, est le plus grand des minorants de A. On la note par $\inf A$ ou I. Concrètement, c'est l'unique minorant I tel que tout autre minorant m est forcément plus petit que I.*

- Exemple1 : Soient $A = \{2, -3, 5\}$ et $B = [0, 1[$, alors

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *La **borne supérieure** de A, si elle existe, est **le plus petit des majorants** de A. On la note par $\sup A$ ou S. Concrètement, c'est l'unique majorant S tel que tout autre majorant M est forcément plus grand que S.*
2. *La **borne inférieure** de A, si elle existe, est **le plus grand des minorants** de A. On la note par $\inf A$ ou I. Concrètement, c'est l'unique minorant I tel que tout autre minorant m est forcément plus petit que I.*

- Exemple1 : Soient $A = \{2, -3, 5\}$ et $B = [0, 1[$, alors

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *La borne supérieure de A, si elle existe, est le plus petit des majorants de A. On la note par* $\sup A$ *ou S. Concrètement, c'est l'unique majorant S tel que tout autre majorant M est forcément plus grand que S.*
2. *La borne inférieure de A, si elle existe, est le plus grand des minorants de A. On la note par* $\inf A$ *ou I. Concrètement, c'est l'unique minorant I tel que tout autre minorant m est forcément plus petit que I.*

- Exemple1 : Soient $A = \{2, -3, 5\}$ et $B = [0, 1[$, alors

$$\inf A = -3; \quad \sup A = 5;$$

v) Bornes supérieures et inférieures

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *La borne supérieure de A, si elle existe, est le plus petit des majorants de A. On la note par $\sup A$ ou S. Concrètement, c'est l'unique majorant S tel que tout autre majorant M est forcément plus grand que S.*
2. *La borne inférieure de A, si elle existe, est le plus grand des minorants de A. On la note par $\inf A$ ou I. Concrètement, c'est l'unique minorant I tel que tout autre minorant m est forcément plus petit que I.*

- Exemple1 : Soient $A = \{2, -3, 5\}$ et $B = [0, 1[$, alors

$$\inf A = -3; \quad \sup A = 5; \quad \inf B = 0; \quad \sup B = 1.$$

v) Bornes supérieures et inférieures

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *La borne supérieure de A, si elle existe, est le plus petit des majorants de A. On la note par $\sup A$ ou S. Concrètement, c'est l'unique majorant S tel que tout autre majorant M est forcément plus grand que S.*
2. *La borne inférieure de A, si elle existe, est le plus grand des minorants de A. On la note par $\inf A$ ou I. Concrètement, c'est l'unique minorant I tel que tout autre minorant m est forcément plus petit que I.*

- Exemple1 : Soient $A = \{2, -3, 5\}$ et $B = [0, 1[$, alors

$$\inf A = -3; \quad \sup A = 5; \quad \inf B = 0; \quad \sup B = 1.$$

- Exemple2 : Soient $C = \{x \in \mathbb{N}^\star, x^2 \leq 10\}$, alors

v) Bornes supérieures et inférieures

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *La borne supérieure de A, si elle existe, est le plus petit des majorants de A. On la note par $\sup A$ ou S. Concrètement, c'est l'unique majorant S tel que tout autre majorant M est forcément plus grand que S.*
2. *La borne inférieure de A, si elle existe, est le plus grand des minorants de A. On la note par $\inf A$ ou I. Concrètement, c'est l'unique minorant I tel que tout autre minorant m est forcément plus petit que I.*

- Exemple1 : Soient $A = \{2, -3, 5\}$ et $B = [0, 1[$, alors

$$\inf A = -3; \quad \sup A = 5; \quad \inf B = 0; \quad \sup B = 1.$$

- Exemple2 : Soient $C = \{x \in \mathbb{N}^{\star}, x^2 \leq 10\}$, alors

$$\inf C = 1; \quad \sup C = 3.$$

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *La borne supérieure de A, si elle existe, est le plus petit des majorants de A. On la note par $\sup A$ ou S. Concrètement, c'est l'unique majorant S tel que tout autre majorant M est forcément plus grand que S.*
2. *La borne inférieure de A, si elle existe, est le plus grand des minorants de A. On la note par $\inf A$ ou I. Concrètement, c'est l'unique minorant I tel que tout autre minorant m est forcément plus petit que I.*

- Exemple1 : Soient $A = \{2, -3, 5\}$ et $B = [0, 1[$, alors

$$\inf A = -3; \quad \sup A = 5; \quad \inf B = 0; \quad \sup B = 1.$$

- Exemple2 : Soient $C = \{x \in \mathbb{N}^\star, x^2 \leq 10\}$, alors

$$\inf C = 1; \quad \sup C = 3.$$

- Exemple3 : Soient $D = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star\}$, alors

v) Bornes supérieures et inférieures

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *La borne supérieure de A, si elle existe, est le plus petit des majorants de A. On la note par $\sup A$ ou S. Concrètement, c'est l'unique majorant S tel que tout autre majorant M est forcément plus grand que S.*
2. *La borne inférieure de A, si elle existe, est le plus grand des minorants de A. On la note par $\inf A$ ou I. Concrètement, c'est l'unique minorant I tel que tout autre minorant m est forcément plus petit que I.*

- Exemple1 : Soient $A = \{2, -3, 5\}$ et $B = [0, 1[$, alors

$$\inf A = -3; \quad \sup A = 5; \quad \inf B = 0; \quad \sup B = 1.$$

- Exemple2 : Soient $C = \{x \in \mathbb{N}^\star, x^2 \leq 10\}$, alors

$$\inf C = 1; \quad \sup C = 3.$$

- Exemple3 : Soient $D = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star\}$, alors

$$\inf D = 0; \quad \sup D = 1.$$

v) Bornes supérieures et inférieures

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *La borne supérieure de A, si elle existe, est le plus petit des majorants de A. On la note par $\sup A$ ou S. Concrètement, c'est l'unique majorant S tel que tout autre majorant M est forcément plus grand que S.*
2. *La borne inférieure de A, si elle existe, est le plus grand des minorants de A. On la note par $\inf A$ ou I. Concrètement, c'est l'unique minorant I tel que tout autre minorant m est forcément plus petit que I.*

- Exemple1 : Soient $A = \{2, -3, 5\}$ et $B = [0, 1[$, alors

$$\inf A = -3; \quad \sup A = 5; \quad \inf B = 0; \quad \sup B = 1.$$

- Exemple2 : Soient $C = \{x \in \mathbb{N}^\star, x^2 \leq 10\}$, alors

$$\inf C = 1; \quad \sup C = 3.$$

- Exemple3 : Soient $D = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star\}$, alors

$$\inf D = 0; \quad \sup D = 1.$$

Avertissement La borne supérieure peut ne pas appartenir à l'ensemble.

Théorème (Admis)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Caractérisation de la borne sup et inf

Théorème (Admis)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure. C'est l'unique nombre réel S vérifiant,*

Théorème (Admis)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure. C'est l'unique nombre réel S vérifiant,*
    1. *S est un majorant de A,*

Théorème (Admis)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure. C'est l'unique nombre réel S vérifiant,*
   1. *S est un majorant de A,*
   2. *$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tel que $a > S - \varepsilon$.*

Théorème (Admis)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure. C'est l'unique nombre réel S vérifiant,*
    1. *S est un majorant de A,*
    2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ *tel que* $a > S - \varepsilon$.
2. *Si A est minorée alors elle admet une borne inférieure. C'est l'unique nombre réel I vérifiant,*

Théorème (Admis)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure. C'est l'unique nombre réel S vérifiant,*
   1. *S est un majorant de A,*
   2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ *tel que* $a > S - \varepsilon$.
2. *Si A est minorée alors elle admet une borne inférieure. C'est l'unique nombre réel I vérifiant,*
   1. *I est un minorant de A,*

Caractérisation de la borne sup et inf

Théorème (Admis)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure. C'est l'unique nombre réel S vérifiant,*
   1. *S est un majorant de A,*
   2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ *tel que* $a > S - \varepsilon$.
2. *Si A est minorée alors elle admet une borne inférieure. C'est l'unique nombre réel I vérifiant,*
   1. *I est un minorant de A,*
   2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ *tel que* $a < I + \varepsilon$.

Caractérisation de la borne sup et inf

Théorème (Admis)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure. C'est l'unique nombre réel S vérifiant,*
   1. *S est un majorant de A,*
   2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ *tel que* $a > S - \varepsilon$.
2. *Si A est minorée alors elle admet une borne inférieure. C'est l'unique nombre réel I vérifiant,*
   1. *I est un minorant de A,*
   2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ *tel que* $a < I + \varepsilon$.

Exemple 1

Caractérisation de la borne sup et inf

Théorème (Admis)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure. C'est l'unique nombre réel S vérifiant,*
   1. *S est un majorant de A,*
   2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ *tel que* $a > S - \varepsilon$.
2. *Si A est minorée alors elle admet une borne inférieure. C'est l'unique nombre réel I vérifiant,*
   1. *I est un minorant de A,*
   2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ *tel que* $a < I + \varepsilon$.

Exemple 1

Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2\}$, alors

Caractérisation de la borne sup et inf

Théorème (Admis)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure. C'est l'unique nombre réel S vérifiant,*
   1. *S est un majorant de A,*
   2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ *tel que* $a > S - \varepsilon$.
2. *Si A est minorée alors elle admet une borne inférieure. C'est l'unique nombre réel I vérifiant,*
   1. *I est un minorant de A,*
   2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ *tel que* $a < I + \varepsilon$.

Exemple 1

Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2\}$, alors

$$\sup A = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \inf A = -\sqrt{2}$$

Caractérisation de la borne sup et inf

Théorème (Admis)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure. C'est l'unique nombre réel S vérifiant,*
   1. *S est un majorant de A,*
   2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ *tel que* $a > S - \varepsilon$.
2. *Si A est minorée alors elle admet une borne inférieure. C'est l'unique nombre réel I vérifiant,*
   1. *I est un minorant de A,*
   2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ *tel que* $a < I + \varepsilon$.

Exemple 1

Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2\}$, alors

$$\sup A = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \inf A = -\sqrt{2}$$

Exemple 2

Caractérisation de la borne sup et inf

Théorème (Admis)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure. C'est l'unique nombre réel S vérifiant,*
   1. *S est un majorant de A,*
   2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ *tel que* $a > S - \varepsilon$.
2. *Si A est minorée alors elle admet une borne inférieure. C'est l'unique nombre réel I vérifiant,*
   1. *I est un minorant de A,*
   2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ *tel que* $a < I + \varepsilon$.

Exemple 1

Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2\}$, alors

$$\sup A = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \inf A = -\sqrt{2}$$

Exemple 2

Soit $B = \{\frac{1}{n+m}, n, m \in \mathbb{N}^\star\}$, alors

Caractérisation de la borne sup et inf

Théorème (Admis)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. *Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure. C'est l'unique nombre réel S vérifiant,*
   1. *S est un majorant de A,*
   2. *$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tel que $a > S - \varepsilon$.*
2. *Si A est minorée alors elle admet une borne inférieure. C'est l'unique nombre réel I vérifiant,*
   1. *I est un minorant de A,*
   2. *$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tel que $a < I + \varepsilon$.*

Exemple 1

Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2\}$, alors

$$\sup A = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \inf A = -\sqrt{2}$$

Exemple 2

Soit $B = \{\frac{1}{n+m}, n, m \in \mathbb{N}^\star\}$, alors

$$\sup B = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \inf B = 0$$

Conséquence

Conséquence

Lemme (lemme d'Archimède)

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ *est archimédien, c-à-d, pour tout* $\varepsilon, x > 0$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n\varepsilon > x$.

Conséquence

Lemme (lemme d'Archimède)

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est archimédien, c-à-d, pour tout $\varepsilon, x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > x$.

Démonstration.

Par l'absurde, on se ramène à supposer que $\frac{x}{\varepsilon}$ est un majorant de $\mathbb{N}$. Donc $\mathbb{N}$ admet une borne sup. M. Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > M - 1$; et donc $n + 1 > M$. Il s'ensuit que M n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$, ce qui est absurde. $\square$

VI) Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

1. $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ *(intervalle fermé borné appelé aussi segment),*
2. $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ *(semi-ouvert à gauche ou semi-fermé à droite),*
3. $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,
4. $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ *(intervalle ouvert),*
5. $[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ *(demi-droite fermée à gauche),*
6. $]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ *(demi-droite ouverte à gauche),*
7. $]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ *(demi-droite fermée à droite),*
8. $]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ *(demi-droite ouverte à droite),*
9. $\varnothing$ *(ensemble vide),*
10. $\mathbb{R}$ *(droite réelle),*

avec a et b des réels tels que $a \leq b$.

VI) Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition

On appelle intervalle *de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :*

1. $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ *(intervalle fermé borné appelé aussi segment),*
2. $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ *(semi-ouvert à gauche ou semi-fermé à droite),*
3. $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,
4. $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ *(intervalle ouvert),*
5. $[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ *(demi-droite fermée à gauche),*
6. $]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ *(demi-droite ouverte à gauche),*
7. $]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ *(demi-droite fermée à droite),*
8. $]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ *(demi-droite ouverte à droite),*
9. $\varnothing$ *(ensemble vide),*
10. $\mathbb{R}$ *(droite réelle),*

avec a et b des réels tels que $a \leq b$.

Exercice Les ensembles suivants sont-ils des intervalles :

$$[-3, -1] \cup]1, +\infty[, \ [0, 1] \cup]1, 5], \{\pi\}, \{x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1\} ?$$

Caractérisation de

Proposition

Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si on a la propriété :

$$\forall\, x, y \in A \Longrightarrow [x, y] \subset A.$$

On dit aussi que A est convexe.

Proposition

Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si on a la propriété :

$$\forall x, y \in A \Longrightarrow [x, y] \subset A.$$

On dit aussi que A est convexe.

Démonstration.

$\square$

Proposition

Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si on a la propriété :

$$\forall\, x, y \in A \Longrightarrow [x, y] \subset A.$$

On dit aussi que A est convexe.

Démonstration.

Pour simplifier on peut supposer A est non vide et bornée, les autres cas se traitant par des idées similaires.

$\square$

Proposition

Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si on a la propriété :

$$\forall x, y \in A \Longrightarrow [x, y] \subset A.$$

On dit aussi que A est convexe.

Démonstration.

Pour simplifier on peut supposer A est non vide et bornée, les autres cas se traitant par des idées similaires.

• La condition nécessaire est facile à vérifier ; il suffit juste de se référer à la définition des intervalles.

$\square$

Proposition

Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si on a la propriété :

$$\forall x, y \in A \Longrightarrow [x, y] \subset A.$$

On dit aussi que A est convexe.

Démonstration.

Pour simplifier on peut supposer A est non vide et bornée, les autres cas se traitant par des idées similaires.

- La condition nécessaire est facile à vérifier ; il suffit juste de se référer à la définition des intervalles.
- Démontrons maintenant que la condition est suffisante.

□

Proposition

Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si on a la propriété :

$$\forall x, y \in A \Longrightarrow [x, y] \subset A.$$

On dit aussi que A est convexe.

Démonstration.

Pour simplifier on peut supposer A est non vide et bornée, les autres cas se traitant par des idées similaires.

• La condition nécessaire est facile à vérifier ; il suffit juste de se référer à la définition des intervalles.

• Démontrons maintenant que la condition est suffisante. Notons γ la borne supérieure de A et δ sa borne inférieure.

□

Proposition

Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si on a la propriété :

$$\forall x, y \in A \Longrightarrow [x, y] \subset A.$$

On dit aussi que A est convexe.

Démonstration.

Pour simplifier on peut supposer A est non vide et bornée, les autres cas se traitant par des idées similaires.

• La condition nécessaire est facile à vérifier ; il suffit juste de se référer à la définition des intervalles.

• Démontrons maintenant que la condition est suffisante. Notons γ la borne supérieure de A et δ sa borne inférieure. On a, par définition, $A \subset [\delta, \gamma]$. Vérifions que $]\delta, \gamma[\subset A$.

$\square$

Proposition

Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si on a la propriété :

$$\forall\, x, y \in A \Longrightarrow [x, y] \subset A.$$

On dit aussi que A est convexe.

Démonstration.

Pour simplifier on peut supposer A est non vide et bornée, les autres cas se traitant par des idées similaires.

• La condition nécessaire est facile à vérifier ; il suffit juste de se référer à la définition des intervalles.

• Démontrons maintenant que la condition est suffisante. Notons γ la borne supérieure de A et δ sa borne inférieure. On a, par définition, $A \subset [\delta, \gamma]$. Vérifions que $]\delta, \gamma[\subset A$. Soit $x \in]\delta, \gamma[$. Par définition des bornes inférieures et supérieures, on en déduit l'existence de $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ tels que $\delta < x_1 < x < x_2 < \gamma$

□

Proposition

Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si on a la propriété :

$$\forall x, y \in A \Longrightarrow [x, y] \subset A.$$

On dit aussi que A est convexe.

Démonstration.

Pour simplifier on peut supposer A est non vide et bornée, les autres cas se traitant par des idées similaires.

• La condition nécessaire est facile à vérifier ; il suffit juste de se référer à la définition des intervalles.

• Démontrons maintenant que la condition est suffisante. Notons γ la borne supérieure de A et δ sa borne inférieure. On a, par définition, $A \subset [\delta, \gamma]$. Vérifions que $]\delta, \gamma[\subset A$. Soit $x \in]\delta, \gamma[$. Par définition des bornes inférieures et supérieures, on en déduit l'existence de $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ tels que $\delta < x_1 < x < x_2 < \gamma$ Par hypothèse, on a $[x_1, x_2] \subset A$ et donc $x \in A$.

$\square$

Proposition

Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si on a la propriété :

$$\forall x, y \in A \Longrightarrow [x, y] \subset A.$$

On dit aussi que A est convexe.

Démonstration.

Pour simplifier on peut supposer A est non vide et bornée, les autres cas se traitant par des idées similaires.

• La condition nécessaire est facile à vérifier ; il suffit juste de se référer à la définition des intervalles.

• Démontrons maintenant que la condition est suffisante. Notons γ la borne supérieure de A et δ sa borne inférieure. On a, par définition, $A \subset [\delta, \gamma]$. Vérifions que $]\delta, \gamma[\subset A$. Soit $x \in]\delta, \gamma[$. Par définition des bornes inférieures et supérieures, on en déduit l'existence de $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ tels que $\delta < x_1 < x < x_2 < \gamma$ Par hypothèse, on a $[x_1, x_2] \subset A$ et donc $x \in A$. On en conclut que $]\delta, \gamma[\subset A \subset [\delta, \gamma]$ et donc que A est un intervalle. □

Proposition

Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si on a la propriété :

$$\forall x, y \in A \Longrightarrow [x, y] \subset A.$$

On dit aussi que A est convexe.

Démonstration.

Pour simplifier on peut supposer A est non vide et bornée, les autres cas se traitant par des idées similaires.

• La condition nécessaire est facile à vérifier ; il suffit juste de se référer à la définition des intervalles.

• Démontrons maintenant que la condition est suffisante. Notons γ la borne supérieure de A et δ sa borne inférieure. On a, par définition, $A \subset [\delta, \gamma]$. Vérifions que $]\delta, \gamma[\subset A$. Soit $x \in]\delta, \gamma[$. Par définition des bornes inférieures et supérieures, on en déduit l'existence de $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ tels que $\delta < x_1 < x < x_2 < \gamma$ Par hypothèse, on a $[x_1, x_2] \subset A$ et donc $x \in A$. On en conclut que $]\delta, \gamma[\subset A \subset [\delta, \gamma]$ et donc que A est un intervalle. □

Exemple L'ensemble $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle.

Corollaire

Soit E une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$. L'ensemble $Maj(E)$ des majorants de E est l'intervalle de $\mathbb{R}$, $Maj(E) = [\sup(E), +\infty[$.

Corollaire

Soit E une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$. L'ensemble $Maj(E)$ des majorants de E est l'intervalle de $\mathbb{R}$, $Maj(E) = [\sup(E), +\infty[$.

Démonstration.

$\square$

Corollaire

Soit E une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$. L'ensemble $Maj(E)$ des majorants de E est l'intervalle de $\mathbb{R}$, $Maj(E) = [\sup(E), +\infty[$.

Démonstration.

Par définition :

$$\mathrm{Maj}(E) = \{M \in \mathbb{R}\, ;\, \forall x \in E,\, x \leq M\}$$

□

Corollaire

Soit E une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$. L'ensemble $Maj(E)$ des majorants de E est l'intervalle de $\mathbb{R}$, $Maj(E) = [\sup(E), +\infty[$.

Démonstration.

Par définition :

$$\mathrm{Maj}(E) = \{M \in \mathbb{R}\,;\ \forall x \in E,\ x \leq M\}$$

Montrons que $\mathrm{Maj}(E)$ est un intervalle en utilisant la caractérisation des intervalles.

$\square$

Corollaire

Soit E une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$. L'ensemble $Maj(E)$ des majorants de E est l'intervalle de $\mathbb{R}$, $Maj(E) = [\sup(E), +\infty[$.

Démonstration.

Par définition :

$$\text{Maj}(E) = \{M \in \mathbb{R}\,;\, \forall x \in E,\ x \leq M\}$$

Montrons que $\text{Maj}(E)$ est un intervalle en utilisant la caractérisation des intervalles. Soient M, M' deux éléments de $\text{Maj}(E)$, tels que $M \leq M'$.

$\square$

Corollaire

Soit E une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$. L'ensemble $Maj(E)$ des majorants de E est l'intervalle de $\mathbb{R}$, $Maj(E) = [\sup(E), +\infty[$.

Démonstration.

Par définition :

$$\text{Maj}(E) = \{M \in \mathbb{R} ; \forall x \in E,\ x \leq M\}$$

Montrons que $\text{Maj}(E)$ est un intervalle en utilisant la caractérisation des intervalles. Soient M, M' deux éléments de $\text{Maj}(E)$, tels que $M \leq M'$. Il est clair que tout $P \in [M, M']$ est aussi un majorant de E donc un élément de $\text{Maj}(E)$.

$\square$

Corollaire

Soit E une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$. L'ensemble $Maj(E)$ des majorants de E est l'intervalle de $\mathbb{R}$, $Maj(E) = [\sup(E), +\infty[$.

Démonstration.

Par définition :

$$\mathrm{Maj}(E) = \{M \in \mathbb{R}\,;\, \forall x \in E,\ x \leq M\}$$

Montrons que $\mathrm{Maj}(E)$ est un intervalle en utilisant la caractérisation des intervalles. Soient M, M' deux éléments de $\mathrm{Maj}(E)$, tels que $M \leq M'$. Il est clair que tout $P \in [M, M']$ est aussi un majorant de E donc un élément de $\mathrm{Maj}(E)$. Autrement dit, $[M, M'] \subset \mathrm{Maj}(E)$. La caractérisation des intervalles montrent que $\mathrm{Maj}(E)$ est un intervalle.

$\square$

Corollaire

Soit E une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$. L'ensemble $Maj(E)$ des majorants de E est l'intervalle de $\mathbb{R}$, $Maj(E) = [\sup(E), +\infty[$.

Démonstration.

Par définition :

$$\text{Maj}(E) = \{M \in \mathbb{R}\,;\, \forall x \in E,\ x \leq M\}$$

Montrons que $\text{Maj}(E)$ est un intervalle en utilisant la caractérisation des intervalles. Soient M, M' deux éléments de $\text{Maj}(E)$, tels que $M \leq M'$. Il est clair que tout $P \in [M, M']$ est aussi un majorant de E donc un élément de $\text{Maj}(E)$. Autrement dit, $[M, M'] \subset \text{Maj}(E)$. La caractérisation des intervalles montrent que $\text{Maj}(E)$ est un intervalle. Par définition, $\sup(E) \in \text{Maj}(E)$. Il s'ensuit que $\text{Maj}(E)$ est de la forme $[\sup(E), +\infty[$. □

VII) Densité

Définition

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert non vide rencontre A. C-à-d, pour tout $a < b$ on a

$$A \cap]a, b[\neq \varnothing$$

VII) Densité

Définition

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert non vide rencontre A. C-à-d, pour tout $a < b$ on a

$$A \cap]a, b[\neq \varnothing$$

Exemple : $\mathbb{N}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}_+$. Mais $\mathbb{R}^\star, \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

VII) Densité

Définition

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert non vide rencontre A. C-à-d, pour tout $a < b$ on a

$$A \cap]a, b[\neq \emptyset$$

Exemple : $\mathbb{N}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}_+$. Mais $\mathbb{R}^\star, \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Démonstration

VII) Densité

Définition

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense *dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert non vide rencontre A. C-à-d, pour tout $a < b$ on a*

$$A \cap]a, b[\neq \varnothing$$

Exemple : $\mathbb{N}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}_+$. Mais $\mathbb{R}^\star, \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Démonstration Pour montrer le dernier point. On raisonne par l'absurde en supposant que

VII) Densité

Définition

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert non vide rencontre A. C-à-d, pour tout $a < b$ on a

$$A \cap]a, b[\neq \varnothing$$

Exemple : $\mathbb{N}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}_+$. Mais $\mathbb{R}^\star, \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Démonstration Pour montrer le dernier point. On raisonne par l'absurde en supposant que pour un intervalle ouvert non vide donné I on a

$$I \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}) = \varnothing.$$

VII) Densité

Définition

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert non vide rencontre A. C-à-d, pour tout $a < b$ on a

$$A \cap]a, b[\neq \varnothing$$

Exemple : $\mathbb{N}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}_+$. Mais $\mathbb{R}^\star, \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Démonstration Pour montrer le dernier point. On raisonne par l'absurde en supposant que pour un intervalle ouvert non vide donné I on a

$$I \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}) = \varnothing.$$

Donc $I \subset \mathbb{N}$, ce qui est impossible ! ■

VII) Densité

Définition

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert non vide rencontre A. C-à-d, pour tout $a < b$ on a

$$A \cap]a, b[\neq \varnothing$$

Exemple : $\mathbb{N}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}_+$. Mais $\mathbb{R}^\star, \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Démonstration Pour montrer le dernier point. On raisonne par l'absurde en supposant que pour un intervalle ouvert non vide donné I on a

$$I \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{N}) = \varnothing.$$

Donc $I \subset \mathbb{N}$, ce qui est impossible ! ■

Proposition (Admis provisoirement)

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement tout réel est limite d'une suite d'éléments de A. C-à-d, pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $x_n \in A$ et

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

Densité de

Densité de

Proposition

L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ *est* *dense* *dans* $\mathbb{R}$.

Densité de

Proposition

L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ *est* *dense* *dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

$\square$

Densité de

Proposition

L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Montrons que tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$ contient un rationnel.

$\square$

Densité de

Proposition

L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Montrons que tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$ contient un rationnel. Si $b - a \geq 2$, alors $]a, b[$ contient un élément de $\mathbb{Z}$.

□

Densité de

Proposition

L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Montrons que tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$ contient un rationnel. Si $b - a \geq 2$, alors $]a, b[$ contient un élément de $\mathbb{Z}$. Sinon, par le lemme d'Archimède, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(b - a) \geq 2$.

□

Densité de

Proposition

L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Montrons que tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$ contient un rationnel. Si $b - a \geq 2$, alors $]a, b[$ contient un élément de $\mathbb{Z}$. Sinon, par le lemme d'Archimède, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(b - a) \geq 2$. Ainsi l'intervalle $]na, nb[$ contient un élément $x \in \mathbb{Z}$. □

Densité de

Proposition

L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Montrons que tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$ contient un rationnel. Si $b - a \geq 2$, alors $]a, b[$ contient un élément de $\mathbb{Z}$. Sinon, par le lemme d'Archimède, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(b - a) \geq 2$. Ainsi l'intervalle $]na, nb[$ contient un élément $x \in \mathbb{Z}$. Par suite, $x/n \in]a, b[$, ainsi $]a, b[$ contient un rationnel. □

Densité de

Densité de

Proposition

L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ *est* *dense* *dans* $\mathbb{R}$.

Densité de

Proposition

L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *est* *dense* *dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

$\square$

Proposition

L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Considérons l'intervalle ouvert non vide $]a, b[$. Il contient un rationnel q par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

$\square$

Proposition

L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Considérons l'intervalle ouvert non vide $]a, b[$. Il contient un rationnel q par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, le lemme d'Archimède utilisé avec $\varepsilon = b - q$ et $x = \sqrt{2}$ montre qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < b - q.$$

□

Densité de

Proposition

L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Considérons l'intervalle ouvert non vide $]a, b[$. Il contient un rationnel q par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, le lemme d'Archimède utilisé avec $\varepsilon = b - q$ et $x = \sqrt{2}$ montre qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < b - q.$$

Donc

$$a < q + \frac{\sqrt{2}}{n} < b\,.$$

□

Proposition

L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Considérons l'intervalle ouvert non vide $]a, b[$. Il contient un rationnel q par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, le lemme d'Archimède utilisé avec $\varepsilon = b - q$ et $x = \sqrt{2}$ montre qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < b - q.$$

Donc

$$a < q + \frac{\sqrt{2}}{n} < b\,.$$

Enfin, il ne reste qu'à vérifier que $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel.

□

Proposition

L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Considérons l'intervalle ouvert non vide $]a, b[$. Il contient un rationnel q par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, le lemme d'Archimède utilisé avec $\varepsilon = b - q$ et $x = \sqrt{2}$ montre qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < b - q.$$

Donc

$$a < q + \frac{\sqrt{2}}{n} < b\,.$$

Enfin, il ne reste qu'à vérifier que $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel. On raisonne par l'absurde en supposant que $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est rationnel,

□

Proposition

L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Considérons l'intervalle ouvert non vide $]a, b[$. Il contient un rationnel q par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, le lemme d'Archimède utilisé avec $\varepsilon = b - q$ et $x = \sqrt{2}$ montre qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < b - q.$$

Donc

$$a < q + \frac{\sqrt{2}}{n} < b\,.$$

Enfin, il ne reste qu'à vérifier que $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel. On raisonne par l'absurde en supposant que $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est rationnel, mais alors $q + \frac{\sqrt{2}}{n} - q = \frac{\sqrt{2}}{n}$ est aussi rationnel

$\square$

Proposition

L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Considérons l'intervalle ouvert non vide $]a, b[$. Il contient un rationnel q par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, le lemme d'Archimède utilisé avec $\varepsilon = b - q$ et $x = \sqrt{2}$ montre qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < b - q.$$

Donc

$$a < q + \frac{\sqrt{2}}{n} < b\,.$$

Enfin, il ne reste qu'à vérifier que $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel. On raisonne par l'absurde en supposant que $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est rationnel, mais alors $q + \frac{\sqrt{2}}{n} - q = \frac{\sqrt{2}}{n}$ est aussi rationnel puisque q est rationnel et l'ensemble des rationnels est stable par soustraction.

□

Proposition

L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Considérons l'intervalle ouvert non vide $]a, b[$. Il contient un rationnel q par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, le lemme d'Archimède utilisé avec $\varepsilon = b - q$ et $x = \sqrt{2}$ montre qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < b - q.$$

Donc

$$a < q + \frac{\sqrt{2}}{n} < b\,.$$

Enfin, il ne reste qu'à vérifier que $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel. On raisonne par l'absurde en supposant que $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est rationnel, mais alors $q + \frac{\sqrt{2}}{n} - q = \frac{\sqrt{2}}{n}$ est aussi rationnel puisque q est rationnel et l'ensemble des rationnels est stable par soustraction. De façon analogue, on aurait $\frac{n}{2}\frac{\sqrt{2}}{n} = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □