Feuille n^o 5 : Suites

1 Première manipulation

Exercice 1

Soit la suite de terme général $a_n = \dfrac{n^3+1}{n^3+n^2+2}$. Trouver un entier N, tel que, si $n \geqslant N$, on ait $|a_n - 1| < 10^{-2}$.
Plus généralement, ϵ étant un nombre réel strictement positif, déterminer un entier N, tel que, si $n \geqslant N$, on ait $|a_n - 1| < \epsilon$. Qu'a-t-on démontré pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 2

Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n+1}{5n+2}$.
Pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, trouver un entier N_p tel que, pour tout $n \geqslant N_p$, on ait $|u_n - \ell| < 10^{-p}$.
Même question avec la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{2n^2+1}{5n^2+2}$.
Observez la différence de rapidité de convergence des deux suites (prendre $p = 4$).

Exercice 3

Ecrire sous forme quantifiée les propriétés suivantes :

1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée
2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente
3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone
4. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}.$$

2 Limite I

Exercice 5

Étudier chacune des suites (u_n) définies ci-dessous, et déterminer lesquelles sont (a) bornées, (b) positives ou négatives, (c) croissantes, décroissantes, (d) convergentes, non convergentes, divergentes vers $+\infty$ ou $-\infty$.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$,

2. $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ u_n = 4 - \dfrac{(-1)^n}{n}$,

3. $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad u_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

Exercice 6

Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies ci-dessous, compléter la définition le cas échéant pour que l'expression proposée ait un sens, étudier la convergence de la suite et déterminer sa limite lorsqu'elle est convergente.

1. $\forall n \in ?,\ u_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}$,

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$,

3. $\forall n \in ?,\ u_n = \dfrac{n}{\ln(n+1)}$.

Exercice 7

Montrer, en utilisant la définition, que les suites $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.

Exercice 8

Montrer que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 9

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_n = \frac{\lfloor a \rfloor + \lfloor 2a \rfloor + \cdots + \lfloor na \rfloor}{n^2}$$

converge et calculer sa limite.

3 Vrai ou Faux

Exercice 10

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? Justifier votre réponse.

1. Si f est une application croissante, la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. Si f est une application croissante, la suite $(f^n(u_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Si P est une fonction polynomiale, la suite $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone à partir d'un certain rang.

4. Si $0 \leqslant r \leqslant 1$ alors $(r^n \sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

5. Si $0 \leqslant r < 1$ alors $(r^n \sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

6. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 alors $(\cos(n)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

7. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 alors $(\cos(n)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.

8. La suite $((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(e^{\frac{in\pi}{4}})_{n\in\mathbb{N}}$.

9. On peut extraire de la suite $(e^{\frac{in\pi}{4}})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite constante.

Exercice 11

Chacun des énoncés suivants est-il vrai ou faux ?

S'il est vrai, le démontrer ; s'il est faux, donner un contre-exemple.

1. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.

2. Si une suite est croissante, majorée par ℓ, elle converge.

3. Si une suite est croissante, majorée par ℓ, elle converge vers ℓ.

4. Toute suite bornée est convergente.

5. Si une suite est convergente, elle est soit croissante majorée, soit décroissante minorée.

6. Toute suite convergente est bornée.

7. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

8. Si $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 12

Les suites suivantes convergent-elles ?
Indication : chercher des suites extraites de la suite (u_n) convergeant vers des limites différentes.

1. $u_n = \dfrac{2n+1+(-1)^n n}{n}$

2. $v_n = \dfrac{1}{n^2 + n^{(-1)^n}}$

3. $w_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$

4 Limite II

Exercice 13

En simplifiant le terme général u_n, étudier la convergence de la suite

$$u_n = \prod_{p=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Exercice 14

Étudier la convergence des suites :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad v_n = \frac{\sqrt{n}}{n + \sin(n)}$$

Exercice 15

Étudier la convergence des suites :

$$a)\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \qquad b)\ u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^2+i}}.$$

Exercice 16

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi[$ et soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_n = 2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right).$$

Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et convergente. *On rappelle que, pour tout $x > 0$, on a $\sin x < x$.*

Exercice 17

Étudier la convergence des suites :

1. $u_n = \sqrt[n]{n}$

2. $u_n = \sqrt[n]{\ln(n)}$

3. $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$ où $a \in \mathbb{R}$

Exercice 18

Étudier la convergence des suites :

$$u_n = \frac{1000^n + n!}{n! + n^{1000}} \qquad v_n = \frac{n^2 + \cos(n)}{2^n + \sin(n)}$$

5 Suites adjacentes

Exercice 19

Montrer que les suites, définies pour $n \geqslant 2$ par

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k-1)} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes et déterminer leur limite.

Exercice 20

Soient a_0 et b_0 deux réels tels que $a_0 < b_0$. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{2a_n + b_n}{3}, \\ b_{n+1} &= \dfrac{a_n + 2b_n}{3}. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ son terme d'indice n à l'aide de n, a_0 et b_0.

2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n$; montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers $\frac{a_0+b_0}{2}$.

Exercice 21

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$ et les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminées par $u_0 = b$, $v_0 = a$ et les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{u_n+v_n}{2}, \\ v_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n}. \end{cases}$$

Montrer que ces deux suites sont covergentes.

6 Densité

Exercice 22

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On rappelle que A est *dense* dans $\mathbb{R}$, si pour tous réels a, b tels que $a < b$, $A \cap]a, b[\neq \emptyset$.

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que si A est dense dans $\mathbb{R}$, alors l'intervalle $]a, b[$ contient une infinité d'éléments de A.

2. Soit A une partie dense dans $\mathbb{R}$, et x un réel quelconque. Montrer que x est la limite d'une suite d'éléments de A.

3. Réciproquement, soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que tout réel soit limite d'une suite d'éléments de A. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

7 Borne supérieure

Exercice 23

On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par $A = \left\{ \dfrac{2n^2}{n^2+1} \, ; \, n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Montrer que A est borné.

2. **a.** Étudier l'existence d'un plus grand élément, d'une borne supérieure de A. Les déterminer s'ils existent.

b. Étudier l'existence d'un plus petit élément, d'une borne inférieure de A. Les déterminer s'ils existent.

3. On définit une suite réelle par $u_n = \dfrac{2n^2}{n^2+1}$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que la suite (u_n) est croissante et convergente.
Déterminer sa limite ℓ.

b. Soit k un entier naturel et $\varepsilon = 10^{-k}$.
Déterminer un entier N tel que, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

8 Suites définies par récurrence

Exercice 24

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $ad - bc = 1$ et $c \neq 0$, on note $f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $a + d \neq 2, -2$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède deux solutions distinctes α, β.

2. Soit $u_0 \in \mathbb{C}$. Pour quelle(s) valeur(s) de u_0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?

3. Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ est une suite géométrique dont on calculera la raison.

Exercice 25

Soit $f :]0,1[\to]0,1[$ une application telle que, pour tout $x \in]0,1[$, on ait $f(x) < x/2$.
On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 = 1/2$ et, si $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante, convergente et que sa limite est 0.

Exercice 26

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_1 = 1$ et pour chaque entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \sqrt{1+2u_n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. En déduire qu'elle est convergente.

Exercice 27

Soit b un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer des valeurs approchées de $a = \sqrt{b}$ par la méthode de Newton appliquée à la fonction $f(x) = x^2 - b$. On définit donc la suite $(x_n)_n$ par la condition initiale $x_0 = c$, où c est un nombre strictement positif, et la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

1. Trouver une expression simple de x_{n+1} en fonction de x_n et b.

2. En déduire que $x_n > a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est convergente et que sa limite est a.

4. Prouver que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$0 \leqslant x_{n+1} - a \leqslant \frac{1}{2a}(x_n - a)^2.$$

5. On pose $y_n = (x_n - a)/2a$. Majorer y_{n+1} en fonction de y_n. En déduire une majoration de y_n.

6. Que peut-on dire de la vitesse de convergence de $(x_n)_n$ vers a ?

9 Pour aller plus loin

Exercice 28

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.

Exercice 29

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente de limite ℓ. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \,.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Étudier la réciproque en considérant la suite $u_n = (-1)^n$.

Exercice 30

Montrer que toute suite (u_n) vérifiant pour tout entier $n \geqslant 0$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 2^{-n}$ est convergente.

Exercice 31

On définit la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = x + \ln(x)$, pour tout $x > 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un unique $x_n \in]0, +\infty[$ tel que $f(x_n) = n$. Donner la valeur de x_1.

2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite (x_n).

3. Étudier le signe de $f(n) - n$ pour tout entier $n > 0$. En déduire que $x_n \leqslant n$. Par une méthode analogue, montrer que $n - \ln(n) \leqslant x_n$.

4. En déduire, si elle existe, la limite de $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.

Exercice 32

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^5 + nx - 1 \,.$$

1. **a.** Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists\, ! u_n \in \mathbb{R}, \quad f_n(u_n) = 0 \,.$$

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1]$.

2. **a.** Calculer $f_{n+1}(u_n)$ en fonction de u_n.

b. En déduire la monotonie de la suite (u_n).

3. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite ℓ appartient à $[0, 1]$.

b. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que $\ell = 0$.

Exercice 33

On définit la fonction $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ par $f(x) = x \exp(x)$, pour tout $x > 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un unique $u_n \in]0, +\infty[$ tel que $f(u_n) = n$.

2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite (u_n).