

Feuille n° 1 : Nombres réels, inégalités

Dans cette feuille, l'usage de la calculatrice est proscrit.

## Préliminaires

### Exercice 1

Les nombres suivants sont-ils rationnels :  $\frac{1}{2}$ ,  $-1$ ,  $3$ ,  $\sqrt{2} - \frac{13}{9}$  ? On admettra que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

### Exercice 2

A-t-on, pour tous entiers strictement positifs  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ ,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \quad ?$$

### Exercice 3

Écrire les nombres rationnels suivants sous la forme  $\frac{a}{b}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{9}{4} - \frac{13}{3} + \frac{11}{6}, \quad \frac{2}{1 - \frac{30}{29 + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{8}.$$

### Exercice 4

Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $b$  non nul. Le nombre  $\frac{a}{b}$  est-il nécessairement rationnel ?

### Exercice 5

Illustrer graphiquement l'égalité suivante :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad (x+y)(z+t) = xz + xt + yz + yt.$$

### Exercice 6

Lequel des deux réels  $\frac{10^{20}}{1+10^{20}}$  et  $1+10^{-20}$  est le plus proche de 1 ?

### Exercice 7

Soit  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $I_\alpha = ]-5 - \alpha, -5 + \alpha[$ . Déterminer  $\alpha$  pour que, si  $x \in I_\alpha$ , alors  $\left| \frac{x+5}{x+3} \right| < 10^{-2}$ .

## Inégalités

### Exercice 8

Représenter graphiquement les ensembles suivants :

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - \sqrt{2}| \leq 1\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| > 5\}.$$

### Exercice 9

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$|x - 3| + |x + 4| \leq 7.$$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  :

$$0 \leq \frac{x}{x^2 - 1} \leq 1.$$

### Exercice 10

1. Montrer que, pour tous les réels  $x$  et  $y$ , on a

$$2|xy| \leq x^2 + y^2.$$

2. Déterminer l'ensemble des  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que

$$2|xy| = x^2 + y^2.$$

### Exercice 11

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On suppose que  $|x - 1| \leq 2$  et que  $-5 \leq y \leq -4$ . Fournir un majorant et un minorant pour chacun des nombres suivants

$$x + y, \quad x - y, \quad xy, \quad \frac{x}{y}, \quad |x| - |y|.$$

### Exercice 12

A-t-on, pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $(a + b)_- = a_- + b_-$  ?

### Exercice 13

Montrer que, pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a :

$$|\sqrt{a_+} - \sqrt{b_+}| \leq \sqrt{|a - b|}.$$

## Intervalles

### Exercice 14

Les ensembles suivants sont-ils des intervalles :

$$[0, 3] \cap [3, 4[, \quad [0, 3] \cup ]3, 4[, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \{x \in \mathbb{R} : x^4 \geq 1\} \quad ?$$

### Exercice 15

Existe-t-il un intervalle qui ne contient aucun nombre rationnel ?

### Exercice 16

1. L'intersection de deux intervalles est-elle un intervalle ? Et la réunion ? Et la réunion de deux intervalles qui s'intersectent ?
2. Trouver deux intervalles dont l'intersection est vide et dont la réunion est un intervalle.

### Exercice 17

On considère les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)_+ \leq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)_+ > 2\}.$$

1. Représenter graphiquement  $A$  et  $B$ .
2. Peut-on écrire  $A$  et  $B$  comme des unions finies d'intervalles disjoints ?
3. Que vaut  $A \cup B$  ? Et  $A \cap B$  ?

## Majorants, minorants, bornes supérieures et inférieures

### Exercice 18

Soit

$$E = \left\{ \frac{201}{17}, \quad -23, \quad \frac{145}{12}, \quad 9\sqrt{3} + \frac{111}{12}, \quad 20, \quad -\frac{231}{11} \right\}.$$

Donner le maximum et le minimum de  $E$ . Si on est amené à utiliser une approximation, on la démontrera.

### Exercice 19

Existe-il un entier naturel majorant tous les réels ? Existe-t-il un réel majorant tous les entiers naturels ?

### Exercice 20

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$  pour laquelle il existe  $M \in X$  tel que :

$$\forall x \in X, \quad x \leq M.$$

Montrer qu'un tel  $M$  est unique. On l'appelle le maximum de  $X$ .

### Exercice 21

1. Montrer que, pour tout  $(x, y) \in [-1, 1]^2$ , on a  $x + y + 3 \neq 0$ .
2. On considère le sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  défini par :

$$A = \left\{ \frac{x - y}{x + y + 3} : x \in [-1, 1], y \in [-1, 1] \right\}.$$

Trouver un majorant et minorant de  $A$ .

## Pour aller plus loin

### Exercice 22

Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $N_1(x, y) = |x| + |y|$ ,  $N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$ . Montrer que pour tous les réels  $x$  et  $y$ , on a :

$$N_\infty(x, y) \leq N_2(x, y) \leq N_1(x, y) \leq 2N_\infty(x, y).$$

### Exercice 23

Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $\mathbb{R}$ . On pose :

$$A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}.$$

On suppose que  $A$  et  $B$  sont majorées.

1. Montrer que  $A + B$  est majorée.
2. Montrer que  $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ .

### Exercice 24

Soit  $r$  un réel strictement positif. On introduit  $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq r\}$ . Montrer que  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée. Notant  $S$  sa borne supérieure, montrer que  $S^2 = r$ .

### Exercice 25

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $X$  une partie finie de  $\mathbb{R}$  à  $n$  éléments qu'on écrit :

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

1. On pose

$$M_1 = \max(x_1, x_2)$$

et, pour  $k \in \{2, \dots, n\}$ , on définit

$$M_k = \max(M_{k-1}, x_k).$$

Montrer que  $M_n \in X$  et que  $M_n$  est un (le) maximum de  $X$ .

2. Montrer que  $X$  admet une borne supérieure, notée  $S$ .
3. Montrer que le maximum de  $X$  est égal à  $S$ .
4. Montrer que  $X$  possède un minimum et que ce minimum est la borne inférieure de  $X$ .