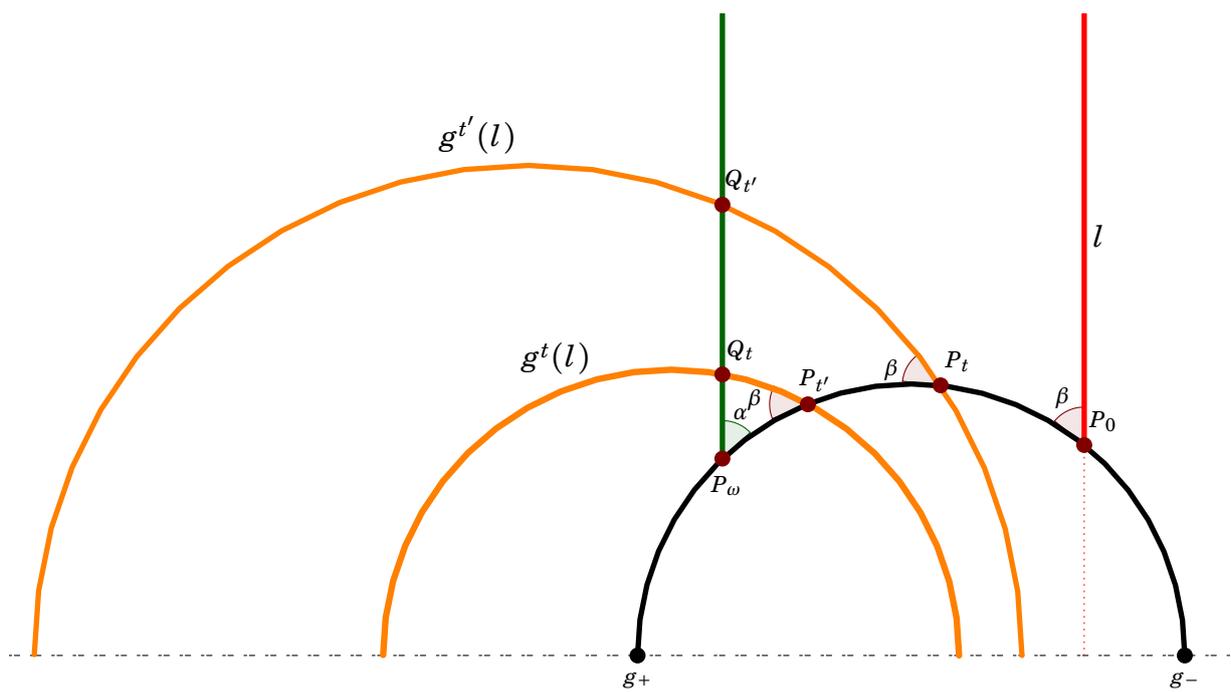


Une Introduction à la Géométrie Hyperbolique



Biblio très selective:

- J. Stillwell. Geometry of surfaces. Intro très accessible à la géométrie des surfaces.
- A. Beardon. The Geometry of Discrete Groups. Excellente intro pour commencer la géométrie du plan hyperbolique.
- J. Radcliffe. Foundations of Hyperbolic Manifolds. Gros livre qui offre une intro très complète à la géométrie hyperbolique.
- W. Thurston. Geometry and topology of three-manifolds. Disponible sur la page web du MSRI. Le classique incontournable de la géométrie et topologie des variétés de dimension 3. Le style peut surprendre...
- M. Kapovich. Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups. Disponible sur la page web de M. Kapovich. Très bon livre qui contient beaucoup plus qu'une introduction à la géométrie hyperbolique. Idéal pour les motivés.

CONTENTS

I. Le plan hyperbolique	1
1. Préliminaire projectif	8
2. Le demi-plan de Poincaré et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	11
3. Les éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ à conjugaison près (en EXO)	13
4. La métrique du demi-plan de Poincaré	15
5. Les triangles du plan hyperbolique	18
II. Les différents modèles de l'espace hyperbolique	23
1. La géométrie Riemannienne (crash course)	23
2. Le modèle du $\frac{1}{2}$ -hyperboloïde	25
3. Le modèle de la boule conforme	25
4. Le modèle du $\frac{1}{2}$ -espace de Poincaré	26
5. Le modèle projectif	26
6. Tout ces modèles donnent le même espace métrique	26
7. Que voit-on dans chaque modèle ?	26
III. Le groupe de Möbius	29
1. Réflexions (affines), et inversions	29
2. Définition	30
3. Le birapport	31
4. Géométrie conforme	31
5. L'extension de Poincaré	33
6. Le groupe de Möbius du demi-espace et de la boule	33
7. La semi-métrique associée au birapport	33
IV. Les modèles conformes	35
1. Reminder	35
2. Le lien entre les deux	36
3. Transitivité	36
4. Distance et Birapport	36
5. Les segments hyperboliques	37
6. Les sphères hyperboliques	37
7. Identification	38
8. Horosphères	38
9. Dévissage de $\mathrm{Sim}(\mathbb{E}^{d-1})$	39

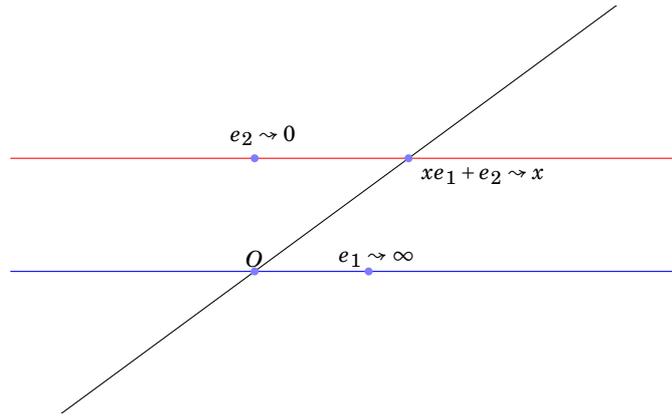
10. Dévissage de M_p	39
11. Topology	40
12. Quelques décompositions	41
13. Similitudes : Décomposition de Jordan	42
V. Classification des isométries de \mathbb{H}	43
1. Enoncé	43
2. Existence de barycentre	44
3. Existence de points fixes	44
4. La démo du théorème-définition	45
VI. L'espace hyperbolique est Gromov-hyperbolique	47
1. Définition	47
2. Démo Conforme	47
VII. Action de groupe et topologie	49
1. Variété topologique	49
2. Action errante, séparante...	52
3. ...libre, proprement discontinue	53
4. Avec un groupe de Lie	53
5. Lemme de Selberg	55
6. Surface	55
VIII. Groupes Kleinéens: Les notions de bases	57
1. L'ensemble limite	57
2. Sous-groupes élémentaires	58
3. Quelques lemmes	59
4. Classification des sous-groupes élémentaires	59
5. Action de convergence	61
6. L'ensemble limite II	62
7. Le domaine de discontinuité	64
8. Domaine fondamental de Dirichlet	65
9. Quelques conséquences	65
IX. Groupes Kleinéens: Des exemples	69
1. Schottky dans le plan hyperbolique	69
2. Réseaux arithmétiques	71
3. Groupe de Coxeter	76
X. L'espace de Teichmüller	77
1. Surface hyperbolique versus structure hyperbolique	77
2. Le lemme de l'hexagone	80
3. Les pantalons	81
4. Décomposition d'une surface en pantalons	82
5. Une application de $T(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}^{3g-3}$	82
6. L'énoncé finale	82

CHAPTER I

LE PLAN HYPERBOLIQUE

Contents

1. Préliminaire projectif	8
1a. Définitions	8
1b. Le birapport	9
1c. Interprétation géométrique du birapport complexe	10
2. Le demi-plan de Poincaré et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	11
2a. Définitions	11
2b. Quelques sous-groupes remarquables de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	12
2c. Transitivité	13
3. Les éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ à conjugaison près (en EXO)	13
3a. L'énoncé de la classification	13
La démo de la classification	14
Les éléments elliptiques: $ \mathrm{tr}(g) < 2$	14
Les éléments paraboliques: $ \mathrm{tr}(g) = 2$	14
Les éléments hyperboliques: $ \mathrm{tr}(g) > 2$	15
4. La métrique du demi-plan de Poincaré	15
4a. Définition et invariance	15
4b. Des segments particuliers	16
4c. Tous les segments	17
4d. On a bien une distance	17
4e. L'espace hyperbolique est propre	18
5. Les triangles du plan hyperbolique	18
5a. Le 5ème postulat d'Euclide	18
5b. La mesure naturelle du demi-plan hyperbolique	18
5c. Convexity	19
5d. L'aire d'un triangle	19
5e. La réciproque	20

FIGURE 1. $k\mathbb{P}^1 = k \cup \{\infty\}$

Cette présentation en dimension 2 sera l'occasion de classifier et décrire les isométries du plan hyperbolique.

Bilan: Reprendre en projectif sur k avec dimension quelconque. Faire le birapport en dim 1, dans cette partie. Mieux, faire la partie complexe, sur tout le lemme des cocycliques.

1. Préliminaire projectif

1a. Définitions. — Soit k un corps. Soit V un k -ev de dimension 2. La *droite projective* est l'ensemble des droites de V , on note:

$$\mathbb{P}(V) \quad \text{ou} \quad k\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(k^2).$$

Par définition on a:

$$k\mathbb{P}^1 = k^2 \setminus \{0\} / \sim = k^2 \setminus \{0\} / k^* \quad \text{où } u \sim v \text{ si et seulement si } u \text{ et } v \text{ sont colinéaires.}$$

Le groupe linéaire $\text{GL}_2(k)$ agit sur le plan k^2 en respectant la relation d'équivalence \sim , par conséquent le groupe $\text{GL}_2(k)$ agit sur la droite projective.

L'identification canonique suivante est très utile. On note H l'hyperplan affine $k \times \{1\}$, l'application $H \rightarrow k\mathbb{P}^1$ $x \mapsto \langle x \rangle$ permet d'identifier $k = H$ avec un ouvert $k\mathbb{P}^1$ dont le complémentaire est le point $\langle e_1 \rangle$ que l'on notera dorénavant ∞ . On a obtenu ainsi la bijection $\varphi : \hat{k} = k \cup \{\infty\} \rightarrow k\mathbb{P}^1$.

Exercice. — Si $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Vérifier que φ est un homéo si l'on munit \hat{k} de la topologie "compactifié d'Alexandrov" ⁽¹⁾ et $k\mathbb{P}^1$ de la topologie quotient.

Exercice. — Montrer que $\hat{\mathbb{R}}$ et $\hat{\mathbb{C}}$ sont homéomorphes à \mathbb{S}^1 et \mathbb{S}^2 , respectivement.

1. On munit $k \cup \{\infty\}$ de la topologie suivante:

- Une base d'ouverts pour un $z \in k$ est donnée par les disques usuels centrés en z .
- Une base d'ouvert de ∞ est donnée par les complémentaires des compacts de k : les $\mathcal{U} = (k \setminus K) \cup \{\infty\}$.

Via φ , l'action d'un élément $g \in \mathrm{GL}_2(k)$ sur $\hat{k} = k\mathbb{P}^1$ devient:

$$g: \hat{k} \rightarrow \hat{k}$$

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in k, \text{ où on a posé } \frac{\pm 0}{0} = \infty \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

puisque:

$$g(z, 1) = (az + b, cz + d) \sim \left(\frac{az + b}{cz + d}, 1 \right)$$

Proposition I.1. — Pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(k)$, l'application $g: k \cup \{\infty\} \rightarrow k \cup \{\infty\}$ est une bijection (même un homéo si il y a une topologie), d'inverse donnée par la matrice g^{-1} .

Proof. — On fait pas... □

Proposition I.2. — Le noyau de l'action $\mathrm{GL}_2(k) \curvearrowright \hat{k}$ est le sous-groupe Z_k des homothéties, i.e $a = d$ et $b = c = 0$.

Proof. —

$$- g(0) = \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0.$$

$$- g(\infty) = \frac{a}{c} \Rightarrow c = 0.$$

$$- \text{Si } g(0) = 0, g(\infty) = \infty \text{ et } g(1) = \frac{a}{d} = 1 \text{ alors } b = c = 0 \text{ et } a = d. \quad \square$$

Remarque. —

- Le point $z \in k$ est fixé par $g: \hat{k} \rightarrow \hat{k}$ si et seulement si le vecteur $(z, 1)$ est un vecteur propre de $g: k^2 \rightarrow k^2$.

- Le point ∞ est un point fixe de $g: \hat{k} \rightarrow \hat{k}$ si et seulement si le vecteur $(1, 0)$ est un vecteur propre de $g: k^2 \rightarrow k^2$ ssi $c = 0$.

Corollaire I.3. — Une homographie a au plus deux points fixes.

1b. Le birapport. —

Exercice. — If $\dim(\mathbb{P}(V)) = 1$ then the action of $\mathrm{PGL}(V)$ on $\mathbb{P}(V)^{3*}$ (= set of triple of distinct points) is simply transitive (i.e. free and transitive).

Corollaire I.4. — Let $\mathbb{P}(V)$ be a projective line. Let p, x, q be three distinct points of $\mathbb{P}(V)$, then there exists a unique isomorphism $g: \mathbb{P}(V) \rightarrow k\mathbb{P}^1 = k \cup \{\infty\}$ such that:

$$g(p) = 0 \quad g(x) = 1 \quad g(q) = \infty$$

Définition. — The cross-ratio of p, x, y, q is $[p: x: y: q] = g(y) \in k\mathbb{P}^1 = k \cup \{\infty\}$.

Remarque. — Be careful, there is a choice here: first to 0, second to 1, fourth to ∞

Remarque. — The order of the point is important, for example:

$$[p: x: y: q] = \frac{1}{[p: y: x: q]} = \frac{1}{[q: x: y: p]} \quad [p: x: y: q] + [x: p: y: q] = 1$$

The permutation are (23), (14) and (12).

Théorème I.5 (Invariance of the cross-ratio). — The cross-ratio is invariant under projective transformation. Let $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(V')$ be projective spaces of any dimension, let l, l' be two lines of $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(V')$, $g: l \rightarrow l'$ an isomorphism, then:

$$[p: x: y: q] = [g(p): g(x): g(y): g(q)]$$



FIGURE 2. Image mnémotechnique.

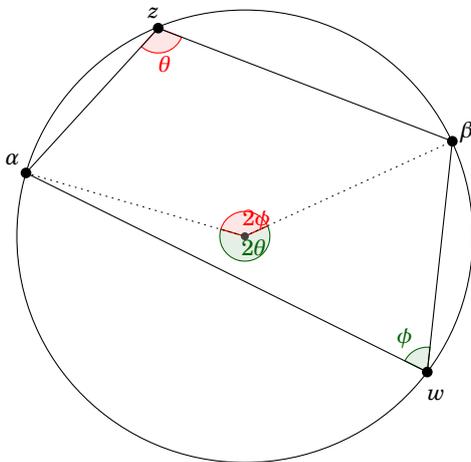


FIGURE 3. Points cocycliques

Proof. — Exo. □

Remarque (Formulas). —

- The classical one (be careful, the formula depend on the convention). For $p, x, y, q \in k \cup \{\infty\}$,

$$[p : x : y : q] = \frac{y-p}{x-p} \cdot \frac{q-x}{q-y}$$

- The "product formula":

$$[p : x : z : q] \cdot [p : z : y : q] = [p : x : y : q]$$

1c. Interprétation géométrique du birapport complexe. —

Remarque (Rappel de géométrie euclidienne). —

- 4 points z, α, w, β distincts sont *cocycliques* ssi $\theta + \phi$ est un multiple de π ⁽²⁾ ssi

$$[z : \alpha : w : \beta] = \frac{\frac{z-\alpha}{z-\beta}}{\frac{w-\alpha}{w-\beta}} = \frac{z-\alpha}{z-\beta} \times \frac{w-\beta}{w-\alpha} \in \mathbb{R}$$

- 3 points z, α, β distincts sont *alignés* ssi l'angle en z est un multiple de π ssi

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta} = \frac{z-\alpha}{z-\beta} \times \frac{\infty-\beta}{\infty-\alpha} = [z : \alpha : \infty : \beta] = \in \mathbb{R}$$

- Ainsi 4 points quelconques z, α, w, β de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sont Möbius-cocycliques ssi

$$[z : \alpha : w : \beta] \in \mathbb{R}$$

2. Voir le dessin

Definition 1.1. — — Dorénavant, on dira cercle euclidien ou \mathbb{E} -cercle pour parler des cercles de l'école primaire. Idem pour les droites de l'école primaire.

- Un *cercle de Möbius* est une droite euclidienne union l'infini ou un cercle euclidien.
- 4 points sont *Möbius-cocycliques* s'il existe un cercle de Möbius qui les contient.

Corollaire 1.6. — *Les homographies conservent les cercles de Möbius.*

2. Le demi-plan de Poincaré et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

2a. Définitions. —

Definition 2.1. — On appelle *demi-plan de Poincaré* l'ensemble:

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$$

Remarque. — On pense toujours au demi-plan de Poincaré comme sous-ensemble de l'espace topologique $\hat{\mathbb{C}}$. Le bord de $\partial\mathbb{H}^2$ en tant que sous-ensemble de $\hat{\mathbb{C}}$ est $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{S}^1$.

Dessin

Proposition 2.2. — *Une matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ qui préserve le demi-plan de Poincaré est à coefficient réel modulo l'action de \mathbb{C}^* .*

Proof. — Pour la première assertion, l'image de ∞ est un réel ou l'infini donc quitte à multiplier par $z \mapsto \frac{-1}{z-a}$, on peut supposer que l'image de ∞ est ∞ , autrement dit que $c = 0$. Modulo \mathbb{C}^* , on peut supposer que $d = 1$. Autrement dit, on est en train d'étudier $z \mapsto az + b$. L'image de i doit être dans \mathbb{H}^2 donc b est réel et $a > 0$. Donc le déterminant de g doit être positif. \square

Proposition 2.3. — *Une matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ préserve le demi-plan de Poincaré si son déterminant est positif, et échange la copie supérieure et inférieure si son déterminant est négatif*

Proof. — Un calcul utile:

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} &= \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{(ac|z|^2 + bd) + (adz + bc\bar{z})}{|cz + d|^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \Im \frac{az + b}{cz + d} &= \frac{ad\Im z - bc\Im z}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{(ad - bc)\Im z}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{\det(g)\Im z}{|cz + d|^2} \end{aligned}$$

\square

Remarque. — L'action qu'il faut regarder c'est l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur \mathbb{H}^2 .

Proof. —

- Le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ qui préserve \mathbb{H}^2 est donc le sous-groupe $GL_2^+(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de déterminant positif.
- Le noyau de l'action $GL_2^+(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}^2$ est toujours le groupe $Z = Z_{\mathbb{R}}$ puisque $Z \leq GL_2^+(\mathbb{R})$.
- Finalement le morphisme naturel $SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow GL_2^+(\mathbb{R})/Z$ est surjectif, de noyau $\{\pm 1\}$.
- Donc le bon groupe à considérer c'est $PSL_2(\mathbb{R})$.

□

Notations. — Si g est une matrice, on notera:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad SL_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{pour} \quad PSL_2(\mathbb{R})$$

Remarque. — Enfin, si:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad -1 \times g = -g = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

Donc la trace de $g \in PSL_2(\mathbb{R})$ n'a pas de sens mais la valeur absolue de la trace a un sens, c'est à dire ne dépend pas du représentant.

2b. Quelques sous-groupes remarquables de $PSL_2(\mathbb{R})$. —

2bi. $R = Stab_{\infty} = AN$. —

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Autrement dit $g(z) = \lambda^2 z + t$ avec $a = \lambda$ et $t = ab$. On a une homothétie de rapport positif centrée en un point de \mathbb{R} , ou une translation horizontale.

2bii. $A = Stab_{0,\infty}$. —

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \mid \lambda > 0 \right\}$$

Autrement dit $g(z) = \lambda^2 z$, on a une homothétie de rapport positif centrée en 0.

2biii. $N = [R, R]$. —

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Autrement dit $g(z) = z + t$, on a une translation horizontale.

Remarque. — On a: $N \triangleleft R$ $N \simeq \mathbb{R}$ $A \simeq \mathbb{R}$ $R = A \times N$.

2biv. $K = Stab_i$. —

$$K = PSO_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$$

Remarque. — Le quotient par $\{\pm 1\}$ impose l'égalité $R_{\theta} = R_{\theta+\pi}$.

Proof. — Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, tel que $g(i) = i$. On refait le même calcul qu'au début...

$$\begin{aligned} i = \frac{ai+b}{ci+d} &= \frac{(ai+b)(-ic+d)}{c^2+d^2} \\ &= \frac{(ac+bd)+i(ad-bc)}{c^2+d^2} \\ &= \frac{(ac+bd)+i}{c^2+d^2} \\ &= i \end{aligned}$$

On obtient donc le système:

$$\begin{cases} ac+bd = 0 \\ c^2+d^2 = 1 \\ ad-bc = 1 \end{cases}$$

Donc on peut poser $c = \sin(\theta)$ et $d = \cos(\theta)$. On mouline et on obtient $a = \cos(\theta)$ et $b = -\sin(\theta)$. \square

2c. Transitivité. —

Proposition I.7. — L'action $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}^2$ est transitive ⁽³⁾ et l'action $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \partial\mathbb{H}^2$ est 2-transitive.

Proof. —

- Mieux, que l'action $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}^2$ est transitive, l'action $R \curvearrowright \mathbb{H}^2$ est simplement transitive.
- En effet, il suffit de regarder $R \cdot i \dots$
- Mieux, que l'action $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \partial\mathbb{H}^2$ est transitive, l'action $K \curvearrowright \partial\mathbb{H}^2$ est simplement transitive.
- En effet, il suffit regarder l'orbite de ∞ , on a $g(\infty) = \cotan(\theta)$ pour $\theta \in]0, \pi[$.
- Mieux, que l'action $\mathrm{Stab}_\infty \curvearrowright \partial\mathbb{H}^2 \setminus \{\infty\} = \mathbb{R}$ est transitive, l'action $N \leq \mathrm{Stab}_\infty \curvearrowright \partial X \setminus \{\infty\}$ est simplement transitive.
- En effet, il suffit regarder l'orbite de 0. \square

3. Les éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ à conjugaison près (en EXO)

3a. L'énoncé de la classification. —

Théorème I.8. — Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ avec $g \neq 1$. On a la tri-alternative suivante:

1. $|\mathrm{tr}(g)| < 2$, g fixe un unique point de $\overline{\mathbb{H}^2}$, g est conjugué à la matrice:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

pour un unique $\theta \in]0, \pi[$. On dit que g est elliptique et θ s'appelle l'angle de g .

3. Rappeler les définitions $G \curvearrowright X$ transitive, simplement transitive, 2-transitive. Interprétation en terme d'orbite et de stabilisateur.

2. $|tr(g)| = 2$, g ne fixe aucun point de \mathbb{H}^2 , g fixe un unique point de $\partial\mathbb{H}^2$, g est conjugué à la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C'est deux matrices ne sont pas conjugués dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ alors qu'elles le sont dans $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$. On dit que g est parabolique.

3. $|tr(g)| > 2$, g ne fixe aucun point de \mathbb{H}^2 , g fixe exactement deux points de $\partial\mathbb{H}^2$, g est conjugué à la matrice:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$$

pour unique $\lambda > 1$. On dit que g est hyperbolique et la quantité $2|\ln(\lambda)| > 0$ s'appelle la distance de translation/force de g .

Remarque. — L'identité est elliptique par convention.

La démo de la classification. —

Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 1, -1$ une matrice de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$. Le polynôme caractéristique de g est:

$$\chi(t) = t^2 - tr(g) \cdot t + 1$$

Le discriminant de χ est donc:

$$\delta = tr(g)^2 - 4$$

On a donc 3 cas à distinguer. On notera λ_1 et λ_2 les valeurs propres de g . On va avoir "besoin" de la transformation suivante $ex : z \mapsto -z \in \text{PGL}_2(\mathbb{R})$ qui est donné par la matrice:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et qui échange le demi-plan du haut et le demi-plan du bas.

Les éléments elliptiques: $|tr(g)| < 2$. —

Dans ce cas, on a:

1. $tr(g) = 2\cos(\theta)$ pour un certain $\theta \in]0, \pi[$.
2. Les valeurs propres de g sont complexes conjugués et distinctes, de produit égale à 1 (donc de module 1) et de somme $2\cos(\theta)$ donc c'est $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$.
3. Donc g est conjugué dans $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ à la matrice: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
4. Autrement dit, il existe $p \in \text{PGL}_2(\mathbb{R})$ tel que $p^{-1}gp$ fixe i et $-i$.
5. Si $det(p) > 0$ c'est bon. Si $det(p) < 0$ alors on pose $p = ex \cdot p$ ainsi $det(p) > 0$ et comme $ex^{-1}R_\theta ex = R_{-\theta}$, donc c'est bon.
6. Enfin $p^{-1}gp : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ fixe exactement $\{i, -i\}$ puisque $p^{-1}gp$ a plus deux points fixes donc $p^{-1}gp : \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$ fixe uniquement le point i , donc $g : \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$ fixe uniquement le point $p^{-1}(i)$.

Remarque. — $R_\theta(i) = i$ et $(D_i R_\theta : T_i \mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^2 \rightarrow T_i \mathbb{H}^2) = R_{2\theta}$

Les éléments paraboliques: $|tr(g)| = 2$. —

Dans ce cas, on a:

1. $tr(g) = \pm 2$ quitte à composer par 1 ou -1 , on peut supposer que $tr(g) = 2$.
2. Donc $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ et $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, par suite $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
3. Or, g n'est pas diagonalisable donc g est conjugué dans $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$ à la matrice:

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Autrement dit, il existe $p \in \text{PGL}_2(\mathbb{R})$ tel que $p^{-1}gp \in \text{Stab}_\infty$. Quitte à changer: $p = ex \cdot p$ si $det(p) < 0$, il existe en fait un $p \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $p^{-1}gp \in \text{Stab}_\infty$.
5. Mais $|tr(g)| = 2$ donc $p^{-1}gp \in N$.
6. exo: translation vers la gauche et vers la droite ne sont pas conjugués.

7. Enfin $p^{-1}gp : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ fixe uniquement ∞ donc $p^{-1}gp : \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$ fixe uniquement le point ∞ , donc $g : \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$ fixe uniquement le point $p^{-1}(\infty) \in \partial\mathbb{H}^2$.

Les éléments hyperboliques: $|tr(g)| > 2$. —

Dans ce cas, on a:

1. Quitte à multiplier par -1 , on peut supposer que $|tr(g)| > 2$.
2. χ a deux valeurs propres réels distinctes de somme et produit positifs donc positive.
3. Donc g fixe deux points de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
4. Donc via le théorème 1.7, on obtient que g est conjugué à un élément de A .
5. Il est clair que $p^{-1}gp$ ne fixe aucun point de \mathbb{H}^2 , et que les seuls points fixes de $\partial\mathbb{H}^2$ sont l'infini et zéro. D'où le résultat.

..... Fin du Cours 1

4. La métrique du demi-plan de Poincaré

4a. Définition et invariance. — On commence par définir la longueur d'un chemin $c : [0, 1] \rightarrow U^2$ de classe C^1 par morceaux, par la formule suivante:

$$lg(c) = \int_0^1 \frac{|\dot{c}(t)|}{\Im c(t)} dt$$

Théorème I.9. — La longueur hyperbolique est invariante par $PSL_2(\mathbb{R})$.

Proof. — Soit $g \in PSL_2(\mathbb{R})$. On pose a, b, c, d comme d'hab. On fait un peu de calcul diff. L'application $g : U^2 \subset \mathbb{C} \rightarrow U^2 \subset \mathbb{C}$ est holomorphe. Sa différentielle en un point $z \in U^2$ est une application linéaire de $T_z U^2 = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ dans lui-même car g est différentiable, mieux comme g est holomorphe cette application linéaire est une similitude donc donné par un nombre complexe et ce nombre est $\frac{dg}{dz} = \frac{1}{(cz+d)^2}$. On a donc:

$$D_z(g) \cdot h = \frac{h}{(cz+d)^2} \quad \text{pour } h \in \mathbb{C} = T_z U^2$$

Maintenant, on fait le calcul:

$$\begin{aligned} lg(g \circ c) &= \int_0^1 \frac{|g \circ c(t)|}{\Im g \circ c(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{|D_z(g) \cdot \dot{c}(t)|}{\Im g(c(t))} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\left| \frac{\dot{c}(t)}{(cz+d)^2} \right|}{\frac{\Im c(t)}{|cz+d|^2}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\frac{|\dot{c}(t)|}{|cz+d|^2}}{\frac{\Im c(t)}{|cz+d|^2}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{|\dot{c}(t)|}{\Im c(t)} dt = lg(c) \end{aligned}$$

□

Definition 4.1. — On appelle \mathbb{H} -segment entre $z, w \in U^2$, l'image d'un chemin d qui réalise le minimum de la longueur parmi les chemins c tels que $c(0) = z$ et $c(1) = w$.

Definition 4.2. — On appelle *distance* entre $z, w \in U^2$ l'infimum $d_{\mathbb{H}}(z, w)$ des longueurs des chemins c tels que $c(0) = z$ et $c(1) = w$.

Remarque. — On va voir que $d_{\mathbb{H}}$ est bien une distance, l'infimum est un minimum, que deux chemins minimisants ont la même image, autrement dit entre deux points du plan hyperbolique il y a un unique \mathbb{H} -segment.

Remarque. — Puisque $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ préserve la longueur hyperbolique, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ préserve la distance hyperbolique aussi. Autrement dit, il agit par isométrie. Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est donc un sous-groupe du groupe des isométries de $(U^2, d_{\mathbb{H}})$.

En fait, c'est la composante neutre de ce groupe et il est d'indice 2 dans celui-ci.

4b. Des segments particuliers. —

Proposition 4.3. — Il existe un et un seul \mathbb{H} -segment joignant le point $z = i\alpha$ et le point $w = i\beta$ ($0 < \alpha < \beta$), il s'agit du segment euclidien joignant ces deux points.

Remarque. — Si on étend à l'infini cet géodésique on obtient une demi-droite (euclidienne) perpendiculaire au bord de U^2 .

Proof. — On écrit:

$$c(t) = x(t) + iy(t) \quad \dot{c}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{|\dot{c}(t)|}{\Im c(t)} dt &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{|\dot{y}(t)|}{y(t)} dt \end{aligned}$$

Avec égalité ssi $\dot{x} = 0$ ssi $x = 0$

$$\geq \int_0^1 \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt$$

Avec égalité ssi y est croissante

$$\begin{aligned} &= \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{|\dot{s}(t)|}{\Im s(t)} dt \end{aligned}$$

Pour tout chemin s inclus dans la demi-droite verticale et sans retour en arrière. □

Remarque. — On a obtenu sur cet exemple la formule suivante:

$$d(x, y) = \ln([p : x : y : q]).$$

4c. Tous les segments. —

Théorème I.10. — *Il existe un et un seul segment joignant deux points quelconques de U^2 . Ce segment est l'unique arc de cercle de Möbius orthogonal au bord de U^2 et passant par les points en question.*

Lemme I.11. — *Soient $z, w \in U^2$ deux points qui n'ont pas la même abscisse. Alors il existe un unique cercle orthogonal à l'axe horizontale qui contient z et w .*

Proof. —

- Un cercle est orthogonal à l'axe horizontale ssi son centre est sur l'axe horizontale.
- Le centre d'un cercle passant par z et w est sur la médiatrice de z et w .

□

Proof. — Soit $t \mapsto c(t)$ un chemin quelconque entre z et w , soit $t \mapsto s(t)$ un chemin sans retour en arrière inclus dans l'unique cercle \mathcal{C} orthogonal à l'horizontal joignant z à w . On note z^* et w^* les extrémités de $\frac{1}{2}\mathcal{C}$. Il existe un élément $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $g(z^*) = 0$ et $g(w^*) = \infty$. L'application g est une homographie donc elle envoie cercle de Möbius sur cercle de Möbius, on obtient donc que $g(\mathcal{C})$ est une droite. Puisque c'est un biholomorphisme, elle conserve aussi les angles donc $g(\mathcal{C})$ est la droite perpendiculaire à l'horizontale passant par 0.

On note $a = g(z)$, $b = g(w)$. Les chemins $g(c(t))$ et $g(s(t))$ joignent a à b , le second est inclus dans le \mathbb{H} -segment et sans retour en arrière, donc $\text{lg}(g \circ c(t)) \geq \text{lg}(g \circ s(t))$ mais g conserve la longueur... et le cas d'égalité est évident aussi. □

Remarque. — On a la formule suivante:

$$d(x, y) = \ln([p : x : y : q]).$$

Proof. — On utilise la 2-transitivité, l'invariance des deux côtés par $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ et le fait que c'est vrai pour $p = 0$ et $q = \infty$. □

4d. On a bien une distance. —

Théorème I.12. — *L'espace $(U^2, d_{\mathbb{H}})$ est un espace métrique.*

Proof. —

- Symétrie: évident, $\text{lg}(c(\cdot)) = \text{lg}(c(1-\cdot))$.
- Inégalité triangulaire: évident, $d_{\mathbb{H}}(x, y) =$ longueur d'un chemin de x à z + la longueur d'un chemin de z à y , puis on prend l'inf sur les chemins de x à z et z à y .
- Séparation: L'infimum est un minimum, et l'intégrant du minimum strictement positif donc l'intégrale est strictement positive.

□

On appelle *plan hyperbolique* le demi-plan de Poincaré muni de la distance que l'on vient de définir et on le note U^2 , dont dit que c'est le modèle du demi-plan de Poincaré.

4e. L'espace hyperbolique est propre. — Un espace métrique est *propre* lorsque ses boules fermées sont compactes.

Théorème I.13. — L'espace $(U^2, d_{\mathbb{H}})$ est un espace métrique propre (donc complet) et la topologie induite par $d_{\mathbb{H}}$ est la même que la topologie usuelle.

Lemme I.14 (Exo). — La \mathbb{H} -sphère de centre i et de rayon ρ est égale à la \mathbb{E} -sphère de centre $\operatorname{ch}(\rho)i$ et de rayon $\cosh(\rho)$.

Lemme I.15 (Exo). — La quantité $\left| \frac{z-w}{z-\bar{w}} \right|$ est invariante par $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Proof. — Un calcul montre que:

$$\forall z, w \notin \mathbb{R}, \quad |g(z) - g(w)| = |z - w| \cdot |g'(z)g'(w)|^{\frac{1}{2}}$$

De plus g est à coefficient réel donc $g'(w) = \overline{g'(\bar{w})}$. □

Corollaire I.16 (Exo). — Si $d_{\mathbb{H}}(z, w) = \rho$ alors $\left| \frac{z-w}{z-\bar{w}} \right| = \frac{e^\rho - 1}{e^\rho + 1}$.

Proof. — La formule est vraie pour i et $e^\rho i$. Ensuite, on se sert du fait que l'action sur les paires de points à distance égale est transitive. □

Proof. — La \mathbb{H} -sphère de centre i et de rayon ρ est donc égale à l'ensemble:

$$\left\{ z \in U^2 \mid \left| \frac{z-i}{z+i} \right| = \frac{e^\rho - 1}{e^\rho + 1} =: \lambda \right\}$$

On doit déterminer un lieu de la forme $MA = \lambda MB$ pour $0 < \lambda < 1$. Il s'agit du cercle de diamètre $[HK]$, pour:

$$H = A + \lambda B \quad K = A - \lambda B$$

Donc la \mathbb{H} -sphère de centre i et de rayon ρ est un \mathbb{E} -cercle ! Or elle passe par $e^\rho i$ et $e^{-\rho} i$, d'où la conclusion. □

Proof. —

- Les topologies sont les mêmes puisque l'ensemble des disques des deux métriques coïncident.
- Le $\frac{1}{2}$ -plan de Poincaré est complet, car les disques fermés sont compacts. On rappelle que toute suite de Cauchy d'un espace métrique est bornée. □

5. Les triangles du plan hyperbolique

5a. Le 5ème postulat d'Euclide. — Étant donné une droite, par un point, il passe une unique droite parallèle. C'est vrai dans le plan euclidien. C'est faux dans sur la sphère puisqu'il n'y a pas de droites parallèles sur la sphère.

Sur le plan hyperbolique, on obtient :

Étant donné une droite, par un point, il passe une infinité (un continuum) de droites parallèles.

5b. La mesure naturelle du demi-plan hyperbolique. — La densité $(x, y) \mapsto \frac{1}{y^2}$ définit un volume (= une mesure avec une densité, aka une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue), via la formule:

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{U^2} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x, y) \frac{dx dy}{y^2}$$

Proposition 5.1. — Ce volume est invariant par $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$.

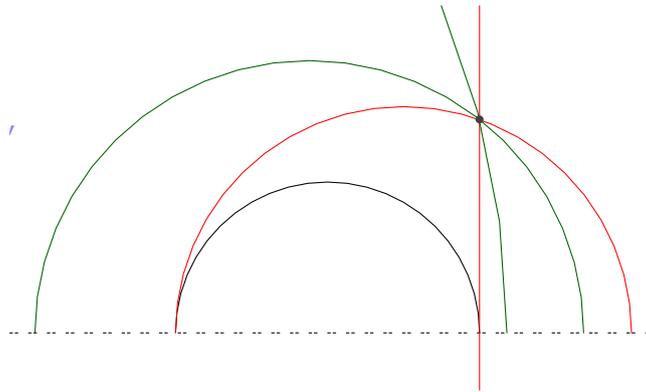


FIGURE 4. Non-validité du 5ème postulat d'Euclide

Proof. — En effet, calculons pour commencer le jacobien de $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ au point $z = x + iy$, par définition si on note $\gamma(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, on a :

$$\text{Jac}(\gamma) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|\frac{\partial(u + iv)}{\partial x}\right|^2 = \left|\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right|^2 = \frac{1}{|cz + d|^4}$$

car

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{Condition de Cauchy-Riemann}$$

Le calcul explicite de $v(x, y) = \text{Im}(\gamma(x + iy)) = \frac{y}{|cz + d|^2}$. Ainsi,

$$\mu(\gamma(\mathcal{A})) = \int_{\gamma(\mathcal{A})} \frac{du dv}{v^2} = \int_{\mathcal{A}} \text{Jac}(\gamma)_{(x,y)} \frac{dx dy}{v(x,y)^2} = \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{|cz + d|^4} \frac{|cz + d|^4}{y^2} dx dy = \mu(\mathcal{A})$$

où, on a fait le changement de variable $u = \text{Re}(\gamma(x + iy))$ et $v = \text{Im}(\gamma(x + iy))$. □

5c. Convexity. — Un convexe de \overline{U}^2 , est un sous-ensemble X de \overline{U}^2 tel que pour tout points $x, y \in \overline{U}^2$, on a $[x, y] \subset X$. L'intersection d'une famille de convexes est un convexe. Donc on peut définir l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble Y de \overline{U}^2 , comme le plus petit convexe contenant Y . Des fois, on prend l'enveloppe convexe dans U^2 , d'autres fois dans \overline{U}^2 .

5d. L'aire d'un triangle. — Un triangle du plan hyperbolique est le convexe fermé d'intérieur donné par l'enveloppe convexe de 3 points dans $U^2 \cup \partial U^2$.

L'angle entre deux géodésiques s'intersectant en un point z est l'angle entre les deux tangentes aux deux cercles en z . en fait, c'est aussi donné par la formule :

$$\theta_z(c_1, c_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \arcsin(d_{\mathbb{H}}(c_1(t), c_2(t)))$$

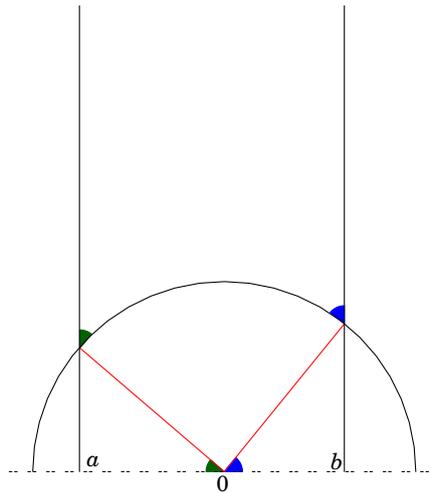
comme dans le cas du plan euclidien....

Théorème I.17 (Gauss-Bonnet). — Soit Δ un triangle du plan hyperbolique. On note α, β, γ les angles de Δ , on a :

$$\text{Aire}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

En particulier,

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$



Proof. — On commence par faire la démo dans le cas où un sommet est l'infini, on peut alors supposer:

- Un sommet est à l'infini
- les deux autres sur le cercle unité.

ainsi on a le dessin:

On a:

$$\begin{aligned}
 \mu(T) &= \int_T \frac{dx dy}{y^2} \\
 &= \int_a^b \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_a^b - \left[\frac{1}{y} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} dx \\
 &= \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin \theta}{\sin \theta} d\theta \\
 &= -\beta + (\pi - \alpha)
 \end{aligned}$$

En posant $x = \cos \theta$ et donc $dx = -\sin \theta d\theta$. Pour le cas général, on choisit un côté, on l'étend à l'infini, et on trace un nouveau côté. On obtient ainsi le triangle de départ comme différence de deux triangles avec un sommet à l'infini, comme sur la figure suivante:

On obtient:

$$\mu(T) = \mu(\text{Gros}) - \mu(\text{petit}) = (\pi - \alpha - (\theta + \gamma) - 0) - (\pi - (\pi - \beta) - \theta - 0) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

□

Corollary 5.2. — Soit P un polygone à n côtés d'angle $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ alors:

$$\mu(P) = (n-2)\pi - \sum \alpha_i$$

5e. La réciproque. —

Théorème I.18. — Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ tel que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, il existe un unique triangle hyperbolique d'angle α, β, γ , à isométrie près.

Proof. — On fait uniquement l'existence. Le cas $\alpha = \beta = \gamma = 0$ est évident. Ensuite, on fait le cas $\gamma = 0$, le dessin de la preuve de Gauss-Bonnet dans le cas $\gamma = 0$ montre que tous les angles α, β sont possibles tant que $\alpha + \beta < \pi$. On fait à présent, le cas général, on se fixe

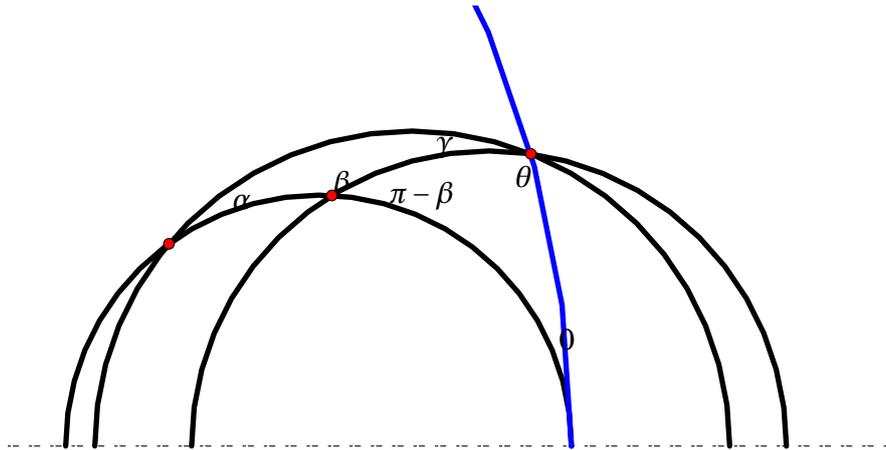
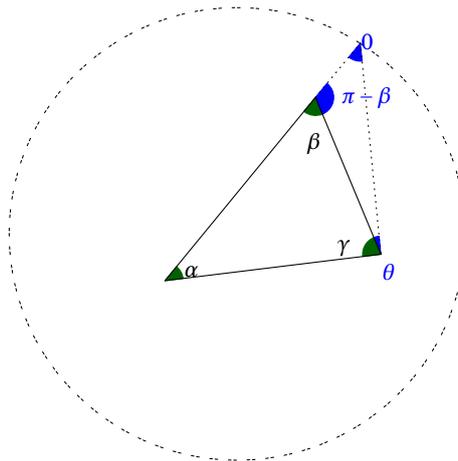


FIGURE 5. Gauss-Bonnet

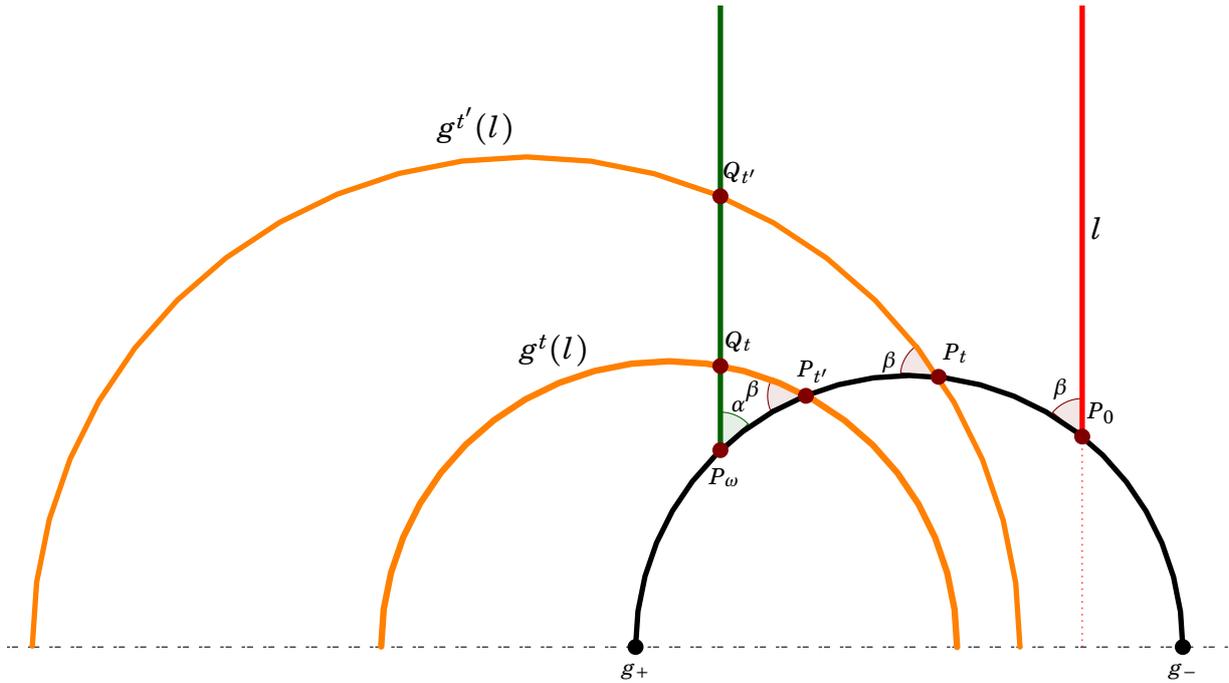


$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, et $0 < \beta < \pi - \alpha$, on peut donc faire la même figure que pour "conservation du volume".

Après, on choisit un point P sur l'arc de cercle entre les deux droites, et on note Q_P l'intersection de la droite de gauche avec la géodésique issue de P qui fait un angle β avec l'arc de cercle.

On a $Q_{P_0} = \infty$ et $Q_{P_\omega} = P_\omega$, on note θ le nouvel angle, on a $\theta_0 = 0$ et $\theta_\infty = ?$. Pour calculer, θ_∞ , on calcule l'aire de $\Delta_t = \pi - \alpha - \beta - \theta_t \rightarrow 0$ donc $\theta_\infty = \pi - \alpha - \beta$. Le TVI montre donc l'existence d'un t tel que Δ_t est le triangle attendu.

Pour l'unicité, ou bien on utilise le théorème d'Al-Kashi hyperbolique ou on reprend la preuve de l'existence. Il suffit de montrer que l'application $t \mapsto \text{Angle en } Q_t$ est strictement croissante (de 0 à $\pi - \alpha - \beta$). Pour cela, on peut considérer un élément hyperbolique g donc les points attractif et répulsif sont les extrémités du cercle unité. Alors les $(g^t(l))_t$ sont les géodésiques qui font un angle β avec le cercle unité. La dynamique



de g nous apprend que ces géodésiques définissent des cercles emboîtés. D'où la stricte-décroissance. □

L'énoncé suivant n'est pas un corollaire direct:

Théorème I.19. — Pour tout α_i tel que $\sum \alpha_i < (n - 2)\pi$, il existe n -gone hyperbolique d'angles α_i .

Remarque. — Si $n \geq 4$ alors il n'y a pas unicité.

..... Fin du cours 2

Théorème I.20. — On note a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle rectangle, où c est la longueur de l'hypothénuse. Alors:

$$\text{ch}(c) = \text{ch}(a)\text{ch}(b)$$

Exercice. — On considère la fonction $c : (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \ni c$ donnée le théorème précédent. Montrer que si $a, b \rightarrow 0$ alors $c^2 \sim a^2 + b^2$. Montrer que si $a, b \rightarrow \infty$ alors $c \sim a + b$.

Définition. — A similarity of a metric space (X, d) is a map $f : X \rightarrow X$ such that there exists a $\lambda > 0$, called the ratio of f , for all $x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) = \lambda d(x, y)$.

Théorème I.21. — A similarity of the hyperbolic plane is an isometry.

Proof. — Let f be a such a similarity and denote λ its ratio. The image of an ideal triangle Δ by f is another ideal triangle and we have:

$$\mu(f(\Delta)) = \lambda^2 \mu(\Delta) \quad (4)$$

But, all the ideal triangle of U^2 are of area π , hence we must have $\lambda = 1$. □

4. In order to show, this formula, one should first show that f is differentiable and that its differential should be an homothety of ratio λ .

CHAPTER II

LES DIFFÉRENTS MODÈLES DE L'ESPACE HYPERBOLIQUE

Contents

1. La géométrie Riemannienne (crash course)	23
2. Le modèle du $\frac{1}{2}$-hyperboloïde	25
3. Le modèle de la boule conforme	25
4. Le modèle du $\frac{1}{2}$-espace de Poincaré	26
5. Le modèle projectif	26
6. Tout ces modèles donnent le même espace métrique	26
7. Que voit-on dans chaque modèle ?	26

1. La géométrie Riemannienne (crash course)

Soit X un ouvert de \mathbb{R}^d , une sous-variété différentielle de \mathbb{R}^d ou une variété différentielle. On note TX l'espace tangent à X , autrement dit: $TX = X \times \mathbb{R}^d$, $\{V = (x, v) \in X \times \mathbb{R}^d \mid v \in T_x X\}$ ou le tangent à X ..., respectivement.

Cet espace est muni d'une projection: $\pi : TX \rightarrow X$ et la fibre en x , i.e $\pi^{-1}(x) = T_x X$ est l'espace tangent à X en x .

On note $T^2 X$ l'espace des couples de vecteurs tangents, autrement dit:

$$T^2 X = \{(V, W) \in TX \times TX \mid \pi(V) = \pi(W)\}$$

On a encore une projection $\pi : T^2 X \rightarrow X$ et la fibre en x , notée $T_x^2 X$ est l'espace des couples de vecteurs tangents en x , qu'on identifie à $T_x X \times T_x X$.

Soit m une application de classe C^∞ de $T^2 X \rightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in X$, l'application restreinte $m_x : T_x^2 X = T_x X \times T_x X \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire. Un tel objet s'appelle *une métrique Riemannienne* sur X .

En effet, on peut ainsi définir une distance sur X , de la façon suivante, on commence par définir la longueur des chemins de classe C^1 par morceaux, soit $c : (a, b) \rightarrow X$, on pose:

$$\text{Longueur}(c) = l(c) = \int_a^b \sqrt{m_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt \in [0, \infty]$$

La distance entre x et y est l'infimum des longueurs des chemins joignant x à y .

Remarque. — La distance sur U^2 vu dans le chapitre précédent vient d'une métrique Riemannienne. On avait:

$$m : U^2 \rightarrow \text{Bil}^+(TU^2) = U^2 \times \text{Bil}^+(\mathbb{R}^2)$$

$$z = (x, y) \mapsto m_z : \begin{array}{ccc} T_x U^2 \times T_x U^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & \frac{u^2 + v^2}{y^2} \end{array}$$

Remarque. — C'est un petit exo de montrer que ce procédé fournit une distance. La symétrie et l'inégalité triangulaire sont évidentes. La séparation est le point un peu délicat.

Proof. — On fait le cas d'un ouvert de \mathbb{R}^d , si $x \neq y$, on a une boule $B(x, R)$ (pour la distance usuelle) tel que $y \notin \bar{B}(x, R)$. Comme $\bar{B}(x, R)$ est compact, il existe un $M > 0$ tel que $\frac{1}{M^2} \|\cdot\| \leq m \leq M^2 \|\cdot\|$.

Par conséquent, on a que pour tout $z \in S(x, R)$, pour tout chemin c' inclus dans $\bar{B}(x, R)$, allant de x à z , on a:

$$\frac{1}{M} l_{\text{usuel}}(c') \leq l(c') \leq M l_{\text{usuel}}(c')$$

Soit c un chemin quelconque de x à y , on note z le premier point du chemin sur $S(x, R)$. On note c' le chemin c restreint de x à z . On a donc:

$$l(c) \geq l(c') \geq \frac{1}{M} l_{\text{usuel}}(c') \geq \frac{R}{M} > 0$$

et indépendant de c . □

Remarque. — Cette démonstration montre aussi que toute boule Riemannienne contient et est contenue dans une boule euclidienne. En particulier, les topologies induites par la métrique Riemannienne et la métrique Euclidienne coïncident.

Définition (Définition de la notion de géodésique d'un espace métrique)

A parametrized geodesic (or M -geodesic) of a metric space (X, d) is a map $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow (X, d)$ which is an isometric embedding, i.e.

$$\forall s, t \in I, \quad d(c(s), c(t)) = |s - t|$$

A geodesic of (X, d) is the image of parametrized geodesic. The metric space (X, d) is a length metric space when every pair of points of (X, d) can be joined by a (parametrized) geodesic. It is uniquely geodesic when the geodesics are unique.

Remarque. — Il y a une notion de géodésique (R -géodésique) en géométrie Riemannienne. Ce n'est pas la même que celle que l'on vient de définir pour un espace métrique quelconque. En géométrie Riemannienne, les géodésiques sont définies comme les courbes solutions d'une équation différentielle. Cette équation différentielle étant construite pour que ses solutions minimisent l'énergie du chemin:

$$\text{Energie}(c) = E(c) = \int_a^b m_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) dt \in [0, \infty]$$

Avec un peu travail, on montre aussi qu'elles minimisent localement la longueur. En résumé, la définition de ce cours de géodésique, donne la notion de plus court chemin globale, la définition Riemannienne donne la notion de plus court chemin locale.

Théorème II.1 (Hopf-Rinow). — Soit M une variété Riemannienne connexe (sans bord). The following property are equivalent:

- There is a point $x \in M$ such that every R -geodesic starting from x is defined for all time.
- For all $x \in M$, all the geodesics starting from x are defined for all time.
- L'espace métrique M est complet.
- L'espace métrique M est propre.

In that case, between any two points there is a R -geodesic which is a M -geodesic.

2. Le modèle du $\frac{1}{2}$ -hyperboloïde

On se place dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^{d+1} et on considère la forme quadratique suivante:

$$q(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_d^2$$

On note:

- $C =$ cône du futur $= \{v \in \mathbb{R}^{d+1} \mid q(v) < 0 \text{ et } x_0 > 0\}$
- $H =$ nappe supérieure $= \frac{1}{2}$ -hyperboloïde $= \{v \in C \mid q(v) = -1\}$

Exercice. — Montrer que si $v \in H$ alors v^\perp est un hyperplan, égale à l'hyperplan tangent (vectoriel) à H en v et $q|_{v^\perp}$ est définie positive.

On peut munir H d'une métrique Riemannienne, en effet H est une sous-variété de \mathbb{R}^{d+1} , et pour tout $x \in H$, la restriction de q/φ à $T_x H$ définit un produit scalaire sur l'espace tangent à H . **On note H^d la variété Riemannienne obtenue.**

La définition suivante peut sembler arbitraire, elle prendra tout son sens plus tard.

Définition. — La ligne de H^d passant par $x, y \in H$ est la trace du plan $\langle x, y \rangle$ sur H ⁽¹⁾. Le segment $[x, y]$ est l'arc d'hyperbole joignant x à y sur la ligne passant par x, y .

On verra que les lignes sont les géodésiques. On a choisit le mot ligne car on ne connaît pas de sens mathématique du mot ligne et que le français du mot ligne peut évoquer un court chemin.

3. Le modèle de la boule conforme

On introduit la métrique Riemannienne sur la boule unité B^d

$$B^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < 1\} \quad \text{via la formule: } |v|_{hyp} = 2 \frac{|v|_{euc}}{1 - |x|^2}$$

On obtient un espace métrique que l'on notera B^d .

Définition. — La ligne passant par $x, y \in B^d$ est si $x, y, 0$ ne sont pas alignés l'unique demi-cercle orthogonal à $P \cap S(0, 1)$ passant par x et y , où P est le plan vectoriel contenant x et y , sinon la trace sur B^d de la droite (xy) . La définition du segment $[x, y]$ est évidente.

Exercice. — La sphère $S(x, s)$ et la sphère $S(y, t)$ sont orthogonales si et seulement si:

$$xy^2 = s^2 + t^2.$$

1. On remarquera que c'est une demi-hyperbole.

4. Le modèle du $\frac{1}{2}$ -espace de Poincaré

On introduit la métrique Riemannienne sur le demi-espace supérieur U^d :

$$U^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d > 0\} \quad \text{via la formule:} \quad |v|_{hyp} = \frac{|v|_{euc}}{x_d}$$

On obtient un espace métrique que l'on notera U^d .

Définition. — La ligne passant par $x, y \in U^d$ est si (xy) n'est pas orthogonal au bord, l'unique demi-cercle orthogonal à $P \cap S(0, 1)$ passant par x et y , où P est le plan vectoriel contenant x, y et orthogonal au bord (donc contenant ∞), sinon la trace sur U^d de la droite (xy) . La définition du segment $[x, y]$ est évidente.

5. Le modèle projectif

On note Ω la boule unité de l'hyperplan $\mathbb{R}^d \times \{1\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$, on peut aussi voir Ω comme un ouvert de l'espace projectif réel de dimension d . On utilise la bijection canonique entre Ω^d et H^d pour munir Ω^d d'une distance. **On obtient un espace métrique que l'on note Ω^d .**

La ligne de Ω^d passant par $x, y \in \Omega^d$ est la trace de (xy) sur Ω^d . La définition du segment $[x, y]$ est évidente et c'est la définition usuelle...

6. Tout ces modèles donnent le même espace métrique

- Il est clair que le modèle de l'hyperboloïde et le modèle projectif sont isométriques.
- Il n'est pas difficile de se convaincre que le modèle de la boule conforme et du 1/2-espace sont isométriques en utilisant une inversion (on le verra très bientôt).
- Ce qui n'est pas clair du tout c'est le passage entre les deux modèles "projectifs" et les modèles "conformes".

Une astuce pour passer de la boule conforme à la boule projective est d'utiliser le modèle de la 1/2-sphère.

Modèle de la $\frac{1}{2}$ -sphère

- Les géodésiques sont les arcs cercles donnés par les plans verticaux.
- En tant qu'ensemble: $\Sigma^+ = \frac{1}{2}$ -sphère supérieure = $\{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|x\| = 1, x_0 > 0\}$

Tout est sur le dessin. Pour la métrique, on transporte la métrique de Ω^d vers Σ^+ , via le flot vertical. Les notions de lignes et de segments sont respectés par les homéos.

Remarque. — On remarque l'homéo $\Omega^d \rightarrow B^d$ ainsi définie est égale à l'identité au bord.

Notation: Si x, y sont deux points de l'espace hyperbolique, on notera p, q les deux extrémités de la droite (xy) .

7. Que voit-on dans chaque modèle ?

- Le groupe $O_{d,1}(\mathbb{R})$ (de dimension $\frac{d(d+1)}{2}$) agit par isométrie sur H^d et Ω^d , par définition de la distance.
- Le groupe orthogonal $O_d(\mathbb{R})$ agit par isométrie sur B^d et Ω^d en fixant 0, par définition de la distance.

- Le groupe des similitudes de \mathbb{R}^d qui préserve $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ agit par isométrie sur U^d en fixant le point ∞ , par de la distance.

La boule de centre 0 et de rayon r de B^d et Ω^d est une boule usuelle de centre 0 mais de rayon un certain $f(r)$ ⁽²⁾.

2. En fait c'est un exercice de montrer que $f = \text{th}(r)$

CHAPTER III

LE GROUPE DE MÖBIUS

1. Réflexions (affines), et inversions

On dira *réflexion* pour réflexion affine orthogonal de \mathbb{R}^d étendu à $\hat{\mathbb{R}}^d$ via $\sigma(\infty) = \infty$.

Définition. — L'inversion par rapport à la sphère $\Sigma = S(a, r)$ (ou de pôle a et de rapport r^2) est l'homéo $\sigma = \sigma_\Sigma : \mathbb{R}^d \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus \{a\}$ définit par la formule suivante:

$$\sigma(x) = a + s(x - a)$$

où s est l'unique réel positif tel que $|\sigma(x) - a| \cdot |x - a| = r^2$.

Remarque. — Ainsi, les points $a, x, \sigma(x)$ sont alignés. Si x est à l'intérieur (resp. extérieur) de Σ alors $\sigma(x)$ est à l'extérieur (resp. intérieur) de Σ . On étend σ à $\hat{\mathbb{R}}^d$ via $\sigma(a) = \infty$ et $\sigma(\infty) = a$.

Théorème III.1. — On a:

- $\sigma(x) = x$ si et seulement si $x \in \Sigma$.
- $\sigma^2 = Id$
- Pour tout $x, y \neq a$, on a:

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| = \frac{r^2|x - y|}{|x - a||y - a|}$$

- L'image d'une \mathbb{M} -sphère est une \mathbb{M} -sphère. Plus précisément:
 - Si H est un hyperplan $\not\ni a$ alors $\sigma(H)$ est une \mathbb{E} -sphère contenant a .
 - Si H est un hyperplan contenant a alors $\sigma(H)$ est un hyperplan contenant a .
 - Si H est une \mathbb{E} -sphère $\not\ni a$ alors $\sigma(H)$ est une \mathbb{E} -sphère ne contenant pas a .
 - Si H est une \mathbb{E} -sphère contenant a alors $\sigma(H)$ est un hyperplan $\not\ni a$.

..... Fin du cours 3

Proof. — Le premier et second points sont clairs via la remarque. Pour le troisième point, on a :

$$\begin{aligned}
 |\sigma(x) - \sigma(y)|^2 &= |s_x(x-a) - s_y(y-a)|^2 \\
 &= r^4 \left| \frac{x-a}{|x-a|^2} - \frac{y-a}{|y-a|^2} \right|^2 \\
 &= \frac{r^4}{|x-a|^4 |y-a|^4} \left| |y-a|^2(x-a) - |x-a|^2(y-a) \right|^2 \\
 &= \frac{r^4}{|x-a|^4 |y-a|^4} (|x-a|^2 |y-a|^4 + |x-a|^4 |y-a|^2 - 2|x-a|^2 |y-a|^2 (x-a|y-a)) \\
 &= \frac{r^4}{|x-a|^2 |y-a|^2} (|y-a|^2 + |x-a|^2 - 2(x-a|y-a)) \\
 &= \frac{r^4}{|x-a|^2 |y-a|^2} |(x-a) - (y-a)|^2 \\
 &= \frac{r^4}{|x-a|^2 |y-a|^2} |x-y|^2
 \end{aligned}$$

Le dernier point est laissé en exercice, voir Ratcliffe Theorem 4.3.4 si besoin. Il faut simplement montrer que la sphère d'équation :

$$A|x|^2 + (u|x) + C = 0$$

est envoyé sur une sphère par l'inversion canonique. □

2. Définition

Définition. — Le *groupe de Möbius* est le groupe engendré par les réflexions et les inversions, on le note $\text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}^d)$.

Remarque. — les similitudes (euclidiennes) sont des transformations de Möbius.

Proof. — Les isométries euclidiennes sont des transformations de Möbius puisque le groupe engendré par les réflexions est le groupe des isométries euclidiennes. Les homothéties sont des transformations de Möbius puisque l'homothétie de centre a et rapport k est la composée de l'inversion par rapport à la \mathbb{E} -sphère de centre a et de rayon 1 avec celle centrée en a et de rayon \sqrt{k} . Par conséquent, □

Corollary 2.1. — *Le groupe de Möbius est engendré par le sous-groupe des similitudes et une inversion.*

Proof. — Exo. □

Corollary 2.2. — *Le groupe $\text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}^d)$ agit transitivement sur les \mathbb{M} -sphères de $\hat{\mathbb{R}}^d$.*

Proof. — Exo. □

3. Le birapport

Définition. — Le *birapport* du quadruplet (p, x, y, q) ⁽¹⁾ de $\hat{\mathbb{R}}^d$ est la quantité suivante:

$$[p : x : y : q] = \frac{|py| \cdot |xq|}{|px| \cdot |yq|} \in [0, \infty]$$

Remarque. — Le birapport est conservé par les similitudes (euclidiennes).

Proposition III.2. — Une application $\varphi : \hat{\mathbb{R}}^d \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^d$ est une transformation de Möbius si et seulement si elle préserve le birapport.

Proof. — Supposons que φ est une transformation de Möbius. Le birapport est préservé par les similitudes. Il ne reste qu'à démontrer que le birapport est préservé par l'inversion $\varphi : x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$, or on a vu que:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \frac{|x - y|}{|x| \cdot |y|}$$

on fait le calcul avec 4 points p, x, y, q , ca se simplifie...

Inversement, supposons que φ préserve le birapport. En composant, par une transformation de Möbius, on peut supposer que φ préserve ∞ . Pour tout quadruplet p, x, y, q tels que $x \neq y$ et $p \neq q$, On a:

$$[\varphi(p), \infty, \varphi(x), \varphi(y)] = [p : \infty : x : y] \quad \text{et} \quad [\varphi(p) : \varphi(q) : \varphi(x) : \infty] = [p : q : x : \infty]$$

Autrement dit:

$$\frac{\varphi(p)\varphi(x)}{\varphi(x)\varphi(y)} = \frac{px}{xy} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(p)\varphi(x)}{\varphi(p)\varphi(q)} = \frac{px}{pq}$$

On obtient donc:

$$\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{\varphi(p)\varphi(q)} = \frac{xy}{pq}$$

Autrement dit, φ est une similitude, en particulier c'est une transformation de Möbius. □

On a fait mieux qu'annoncer, on a montré aussi:

Proposition III.3. — Le stabilisateur de l'infini dans le groupe de Möbius est le groupe des similitudes.

4. Géométrie conforme

Définition. — Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^d et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application de classe \mathcal{C}^1 . We say that f is *conformal*, when for all $x \in \mathcal{U}$, the linear map $T_x f : T_x \mathcal{U} = \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ is a similarity.

Lemme III.4. — Let g be a linear map of \mathbb{R}^d . Then g is a similarity if and only if g preserves (geometric ⁽²⁾) angles between non-zero vectors.

1. Implicitly always, assuming that $\#\{p, x, y, q\} \geq 3$.

2. The geometric angle is $\theta(u, v) = \arccos((u|v))$ when $|u| = |v| = 1$.

Proof. — If g is a similarity then it is clear that g preserves angles between non-zero vectors. Suppose now, that g preserves angles between non-zero vectors, then the d -uple $(g(e_1), \dots, g(e_d))$ image of the canonical basis by g , must be an orthogonal basis. Let h be the orthogonal matrix such that $h(e_i) = \frac{g(e_i)}{|g(e_i)|}$, then gh^{-1} preserves angles between non-zero vectors. So we may assume without loss of generality that $g(e_i) = c_i e_i$ with $c_i > 0$. Now, for all i, j , we have that:

$$\theta(g(e_i + e_j), g(e_i)) = \theta(e_i + e_j, e_i) = \frac{\pi}{4}$$

In other words,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(c_i e_i + c_j e_j | c_i e_i)}{\sqrt{c_i^2 + c_j^2} c_i} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i^2 + c_j^2}}$$

In others words,

$$c_i^2 + c_j^2 = 2c_i^2$$

Hence, for all i, j , $c_i = c_j$ and so g is similarity. \square

Définition. — Let $\alpha, \beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$ be two curves of class \mathcal{C}^1 such that $\alpha(0) = \beta(0)$ and $\dot{\alpha}(0), \dot{\beta}(0) \neq 0$. The *angle between α and β at 0* is the angle between $\dot{\alpha}(0)$ and $\dot{\beta}(0)$

Proposition III.5. — Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^d et $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application de classe \mathcal{C}^1 . Then f is conformal if and only if f preserves the angles between curves in \mathcal{U} .

Proof. — Exercise. Hint: use previous Lemma... \square

Proposition III.6. — Les transformations de Möbius sont conformes.

Proof. — Il suffit de montrer que les similitudes et l'inversion canonique sont des applications conformes. It is clear for similarity since the derivate of an (affine) similarity is a (linear) similarity. To conclude it is sufficient to show that the map $\sigma: x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$ is conformal.

We have:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_j}{|x|^2} \right) = \frac{\delta_{ij} |x|^2 - 2x_j x_i}{|x|^4}$$

So:

$$T_x \sigma \cdot v = \frac{1}{|x|^2} \left(v - 2v \frac{(x|v)}{|x|^2} \right)$$

We recall that, if u is a unit vector of \mathbb{R}^d then the linear map $v \mapsto v - 2v(u|v)$ is nothing but the reflection across the hyperplane u^\perp . Hence, $T_x \sigma$ is a similarity. \square

Théorème III.7 (Theorem of Liouville 1850). — If $d \geq 3$, then any conformal map $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ extend to a Möbius transformation.

Remarque. — In dimension 2, being conformal is equivalent to being holomorphic with a non-null differential, hence there are a lot of conformal map that do not extend to Möbius transformation.

5. L'extension de Poincaré

On va définir une injection $\text{Möb}(\mathbb{R}^{\hat{d}}) \rightarrow \text{Möb}(\mathbb{R}^{\hat{d}+1})$, autrement dit on va prolonger toute transformation de Möbius de $\mathbb{R}^{\hat{d}}$ à $\mathbb{R}^{\hat{d}+1}$.

Pour commencer, on identifie $\mathbb{R}^{\hat{d}}$ à $\mathbb{R}^{\hat{d}} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{\hat{d}+1}$. Les réflexions et les inversions s'étendent de façon évidente !

Lemme III.8. — *Une transformation de Möbius qui fixe tous les points d'une sphère Σ est ou bien l'identité ou bien l'inversion par rapport à Σ .*

Corollaire III.9. — *L'extension de Poincaré est bien définie.*

Proof. — Une transformation de Möbius φ est un produit de réflexions et d'inversions. Supposons que φ s'écrive de deux façons différentes $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ et $\tau_1 \cdots \tau_l$, alors les candidats pour l'extension (de Poincaré) sont $\tilde{\varphi}_\sigma = \tilde{\sigma}_1 \cdots \tilde{\sigma}_k$ et $\tilde{\varphi}_\tau = \tilde{\tau}_1 \cdots \tilde{\tau}_l$.

Le produit $\tilde{\varphi}_\sigma \tilde{\varphi}_\tau^{-1}$ est une transformation de Möbius qui préserve le demi-espace supérieur et qui est égale à l'identité sur le bord de celui-ci. \square

Proof of the Lemma. — On peut supposer que $\Sigma = \mathbb{R}^{\hat{d}-1}$, ainsi $\varphi(\infty) = \infty$. Donc φ est une similitude de $\mathbb{R}^{\hat{d}}$ qui est égale à l'identité sur l'hyperplan vectoriel $\mathbb{R}^{\hat{d}-1} \times \{0\}$; donc φ est une isométrie vectorielle qui vaut l'identité en $e_1, \dots, e_{\hat{d}-1}$. Donc on a $\varphi(e_{\hat{d}}) = \pm e_{\hat{d}}$. \square

6. Le groupe de Möbius du demi-espace et de la boule

On note $\text{Möb}(X)$ le sous-groupe du groupe $\text{Möb}(\mathbb{R}^{\hat{d}})$ qui préserve X . En particulier, on utilisera cette notation pour $X = U^{\hat{d}}$ et $B^{\hat{d}}$.

Proposition III.10. — *Toute transformation de Möbius du demi-espace (resp. de la boule) est un produit de réflexions et d'inversions par rapport à des sphères orthogonales au bord du demi-espace (resp. de la boule).*

Proof. — Toute transformation de Möbius g de X induit une transformation de Möbius de ∂X , par exemple car la préservation du birapport caractérise les transformations de Möbius.

Donc g est un produit de réflexions et d'inversions de ∂X , l'extension de Poincaré transforme ces réflexions et inversions de ∂X , en réflexions et inversions de X par rapport à des sphères orthogonales à ∂X . \square

7. La semi-métrie associée au birapport

On définit sur $U^{\hat{d}}$ et $B^{\hat{d}}$ la semi-distance donnée par :

$$d_{er}(x, y) = |\ln([p : x : y : q])|$$

où $\{p, q\}$ est l'intersection de l'unique \mathbb{M} -cercle \mathcal{C} ⁽³⁾ orthogonal à ∂X passant par x et y .

Remarque. — L'application d_{er} définit une *semi-distance*, i.e. vérifie les axiomes de séparation et symétrie d'une distance mais pas nécessairement l'inégalité triangulaire.

3. L'existence et l'unicité de \mathcal{C} est clair si $X = U^{\hat{d}}$, on utilise $T_{\sqrt{2}}$ pour obtenir l'existence et l'unicité de \mathcal{C} pour $X = B^{\hat{d}}$.

Remarque. — On verra plus tard qu'en fait $d_{cr} = d$.

CHAPTER IV

LES MODÈLES CONFORMES

Contents

1. Reminder	35
2. Le lien entre les deux	36
3. Transitivité	36
4. Distance et Birapport	36
5. Les segments hyperboliques	37
6. Les sphères hyperboliques	37
7. Identification	38
8. Horosphères	38
9. Dévissage de $\text{Sim}(\mathbb{E}^{d-1})$	39
10. Dévissage de M_p	39
11. Topology	40
11a. General remark	40
11b. Remark useful to study M	40
12. Quelques décompositions	41
12a. Décomposition KAK	41
12b. Décomposition d'Iwasawa	41
13. Similitudes : Décomposition de Jordan	42

1. Reminder

On a introduit la métrique Riemannienne sur U^d via la formule, pour tout point $x \in U^d$, et tout vecteur $v \in T_x U^d = \mathbb{R}^d$:

$$|v|_{hyp} = \frac{|v|_{euc}}{x_d}$$

et sur B^d par la formule, pour tout point $x \in B^d$, et tout vecteur $v \in T_x B^d = \mathbb{R}^d$:

$$|v|_{hyp} = 2 \frac{|v|_{euc}}{1 - \|x\|_{hyp}^2}$$

2. Le lien entre les deux

On considère σ l'inversion de pôle e_d et rayon $\sqrt{2}$, on a donc:

$$\sigma(x) = e_d + \frac{2(x - e_d)}{|x - e_d|^2}$$

En particulier, on a:

$$|\sigma(x)|^2 = 1 + \frac{4x_d}{|x - e_d|^2}$$

Ainsi σ envoie $-U^d$ sur B^d . On note $T_{\sqrt{2}} = \sigma \circ (-Id)$, qui envoie U^d sur B^d .

Théorème IV.1. — $T_{\sqrt{2}}: U^d \rightarrow B^d$ envoie lignes sur lignes, préserve le birapport, préserve les métriques Riemanniennes.

Proof. — On pose $T = T_{\sqrt{2}}$. L'homeo T envoie \mathbb{M} -cercle sur \mathbb{M} -cercle et préserve les angles. Donc T envoie les lignes de U^d sur les lignes de B^d . L'application T préserve le birapport puisque c'est une transformation de Möbius. Pour le dernier point, il faut faire un calcul. Il faut montrer que pour tout point $x \in U^d$, et tout vecteur $v \in T_x U^d = \mathbb{R}^d$, on a:

$$|DT_x \cdot v|_{T(x)}^{hyp, B^d} = 2 \frac{|DT_x \cdot v|}{1 - |T(x)|^2} = \frac{|v|}{x_d} = |v|_x^{hyp, U^d}$$

Laissé en exo... □

3. Transitivité

On pose $M = \text{Möb}(U^d)$ ou $\text{Möb}(B^d)$, $X = U^d$ ou B^d , $\partial X = \dots$, $\overline{X} = \dots$. Les actions $\text{Möb}(U^d) \curvearrowright \overline{U^d}$ et $\text{Möb}(B^d) \curvearrowright \overline{B^d}$ sont conjugués via $T_{\sqrt{2}}$ qui préserve tout....

Théorème IV.2. — L'action $M \curvearrowright X$ est transitive et l'action $M \curvearrowright \partial X$ est 2-transitive.

Proof. — Le groupe $\text{Möb}(U^d)$ agit transitivement sur U^d puisque $\text{Möb}(U^d)$ contient $\text{Sim}(\mathbb{E}^{d-1})$ qui contient le groupe HT^U des homothéties-translations de \mathbb{R}^{d-1} qui agit simplement transitivement sur U^d .

Le groupe $\text{Möb}(B^d)$ agit transitivement sur ∂B^d puisque $\text{Möb}(B^d)$ contient ⁽¹⁾ le groupe $O_d(\mathbb{R})$ qui agit transitivement sur ∂B^d .

Le stabilisateur de ∞ dans $\text{Möb}(U^d)$ agit transitivement sur $\partial U^d \setminus \{\infty\}$ puisqu'il contient $\text{Sim}(\mathbb{E}^{d-1})$ qui contient le groupe des translations de \mathbb{E}^{d-1} qui agit simplement transitivement sur $\partial U^d \setminus \{\infty\}$. □

..... Fin du cours 4

4. Distance et Birapport

Théorème IV.3. — Le groupe M agit sur X par isométrie.

Proof. — On prend $X = U^d$, le groupe M est engendré par $\text{Sim}(\mathbb{E}^{d-1})$ et l'inversion canonique. Il est clair que $\text{Sim}(\mathbb{E}^{d-1})$ agit par isométrie, le lemme suivant conclut. □

Lemme IV.4. — L'inversion canonique est une isométrie de U^d .

1. Exo: le groupe $O_d(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions.

Proof. — On note $x(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t))$ un chemin. L'inversion canonique définit le chemin:

$$t \mapsto y(t) = \frac{x(t)}{|x(t)|^2}$$

On dérive:

$$\dot{y}_i = \frac{\dot{x}_i |x|^2 - 2x_i (x|\dot{x})}{|x|^4}$$

Donc

$$|\dot{y}|_{euc} = \frac{1}{|x|^4} (|\dot{x}|^2 |x|^2 + 4|x|^2 (x|\dot{x})^2 - 4(x|\dot{x})^2 |x|^2) = \frac{|\dot{x}|^2}{|x|^2}$$

Or,

$$y_d = \frac{x_d}{|x|^2}$$

Donc

$$|\dot{y}|_{hyp} = \frac{|\dot{x}|^2 |x|^2}{|x|^2 x_d} = |\dot{x}|_{hyp}$$

□

5. Les segments hyperboliques

Lemme IV.5. — Soit $x, y \in U^d$ alors $d(x, y) = |\ln([p : x : y : q])|$ et la géodésique entre x et y est le \mathbb{M} -segment orthogonal au bord.

Proof. — Puisque l'action de $\text{Möb}(U^d)$ préserve la distance, la semi-distance, on peut utiliser la 2-transitivité de l'action sur le bord pour se ramener au cas $p = 0$ et $q = \infty$, et ce cas se traite de façon similaire au cas de la dimension 2 dans le chapitre 1. □

6. Les sphères hyperboliques

Théorème IV.6. — Tout \mathbb{H} -sphère de X est une \mathbb{E} -sphère ⁽²⁾.

Proof. — L'action de M sur les \mathbb{H} -sphères de rayon R est transitive, puisque l'action $M \curvearrowright X$ par isométrie est transitive. La \mathbb{H} -sphère de B^d de centre 0 et de rayon R est une \mathbb{E} -sphère centrée en 0 puisque invariante par le groupe orthogonal $O_d(\mathbb{R})$. Le groupe M préserve les \mathbb{M} -sphères. Conclusion: toute \mathbb{H} -sphère de X est une \mathbb{M} -sphère, comme elle ne peut passer par l'infini, c'est une \mathbb{E} -sphère. □

Lemme IV.7. — La \mathbb{H} -sphère de U^d de centre ae_d et de rayon R est la \mathbb{E} -sphère de centre $ach(R)e_d$ et de rayon $ash(R)$.

Proof. — Exo. □

Lemme IV.8. — Soit $x_n \rightarrow x_\infty \in \partial X$ avec $x_\infty \neq \infty$ si $X = U_d$. On écrit $S_{\mathbb{H}}(x_n, R) = S_{\mathbb{E}}(a_n, r_n)$. Alors, on a $a_n \rightarrow x_\infty$ et $r_n \rightarrow 0$.

2. Bien entendu, le centre et le rayon change.

Proof. — On fait le cas $X = U^d$ et $x_\infty \neq \infty$. Le groupe des translations horizontales est inclus dans le stabilisateur de ∞ et préserve la géométrie Hyperbolique et Euclidienne donc on peut supposer que:

$$x_n = h_n e_d, \quad \text{avec } h_n > 0$$

Le lemme précédent montre qu'on a:

$$a_n = h_n \operatorname{ch}(R) \quad r_n = h_n \operatorname{sh}(R)$$

D'où le résultat. Le cas $X = B^d$ réclame un calcul similaire, en prenant soin de se ramener dans une situation calculable. \square

Moral: Les boules de rayon contrôlées et de centre proche du bord sont minuscules pour l'œil euclidien.

Moral plus précise: On a $d_{\mathbb{E}}(a_n, x_\infty) \asymp d_{\mathbb{E}}(x_n, x_\infty) \asymp r_n$.

7. Identification

Exercice. — Soit (X, d) un espace métrique. Soit $G \leq \operatorname{Isom}(X, d)$. On suppose que:

- l'action $G \curvearrowright X$ est transitive.
- On a $\operatorname{Stab}_{x_0}(\operatorname{Isom}(X, d)) \leq G$ pour un point $x_0 \in X$.

alors $G = \operatorname{Isom}(X, d)$.

Exercice. — Le groupe des isométries de la sphère \mathbb{S}^m avec la métrique de l'angle est le groupe $O_{m+1}(\mathbb{R})$. Hint: Do an induction.

Proposition IV.9. — *Le groupe des isométries de l'espace hyperbolique (modèles conformes) est le groupe de Möbius de son bord.*

Proof. — Soit f une isométrie de B^d , quitte à composer par une transformation de Möbius, on peut supposer que $f(0) = 0$. On obtient donc que f préserve la \mathbb{H} -sphère S de centre 0 et de rayon 1. De plus, f préserve la métrique induite sur S par B^d , or cette métrique est invariante par le groupe orthogonal qui est un sous-groupe du stabilisateur de 0 dans M . Donc S est isométrique (à multiplication par une constante près) à une sphère euclidienne usuelle donc f est une isométrie de la sphère. \square

8. Horosphères

Remarque. — Dans U^d , le groupe $M_\infty = \operatorname{Sim}(\mathbb{R}^{d-1})$ permutent les hypersurfaces $\{x_d = \text{cte}\}$. Le sous-groupe $\operatorname{Isom}(\mathbb{R}^{d-1})$ les préservent. Ces hypersurfaces sont les \mathbb{M} -sphères incluses dans U^d , tangentes à ∂U^d ⁽³⁾ en ∞ .

Définition. — On appelle *horosphère de centre p* toute \mathbb{M} -sphère incluse dans X et tangente à ∂X en p .

Remarque. — This is not the right definition. There is a metric definition. Of course, the two definitions gives the same notion in that case.

Proposition IV.10. — *Une horosphère de X munit la métrique Riemannienne induite (intrinsèque) par X est isométrique to the Euclidean space \mathbb{E}^{d-1} .*

3. One has two \mathbb{M} -spheres that intersects in only one point.

Proof. — C'est évident si $X = U^d$ et le centre de l'horosphère est ∞ . \square

Exercice (Lemme pour les paras). — Soient \mathcal{H} une horosphère de centre p , $c_1(t), c_2(t)$ deux chemins géodésiques tels que $c_1(+\infty) = c_2(+\infty) = p$ et $c_1(0), c_2(0) \in \mathcal{H}_p$. Montrer que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d_{\mathbb{H}}(c_1(t), c_2(t)) = 0$$

Exercice (Lemme pour les hyperbos). — Soit \mathcal{H} une horosphère de centre p , soit x à l'extérieur de l'horoboule associée. On note $\pi = [x, p] \cap \mathcal{H}$. On a:

$$\forall y \in \mathcal{H}, \quad d(x, y) \geq d(x, \pi) \quad \text{avec égalité si et seulement si } y = \pi$$

Remarque. — - Le choix d'une horosphère \mathcal{H} fournit une identification entre \mathcal{H} et $\partial X \setminus \{p\}$, et donc une métrique induite.

- Soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ deux horosphères centrées en p , les métriques Riemanniennes induites sur $\partial X \setminus \{p\}$ sont proportionnelles, donc $\partial X \setminus \{p\}$ est un espace euclidien bien défini à un facteur multiplicatif près.
- On ne peut donc pas parler de distance entre deux points, mais cela a un bien un sens⁽⁴⁾ de dire que le groupe M_p agit par similitude sur $\partial X \setminus \{p\}$.
- Enfin, on peut aussi parler de sous-groupes de M_p qui agissent par isométries, par homothéties ou par translations.

9. Dévissage de $\text{Sim}(\mathbb{E}^{d-1})$

On note:

- T_∞ le sous-groupe des translations de $\text{Sim}(\mathbb{E}^{d-1})$.
- $A_{\infty, q}$ le sous-groupe des homothéties de centre q de $\text{Sim}(\mathbb{E}^{d-1})$.
- AT_∞ le sous-groupe des homothéties-translations de $\text{Sim}(\mathbb{E}^{d-1})$.
- I_p le sous-groupe des isométries.
- $L_{\infty, q}$ le sous-groupe des isométries qui fixe q .

10. Dévissage de M_p

Comme les groupes M_p et $M_\infty = \text{Sim}(\mathbb{E}^{d-1})$ sont conjugués par des transformations de Möbius et que l'action $M \curvearrowright \partial X$ est 2-transitive, on en déduit l'existence de sous-groupes:

$$T_p, \quad A_{pq}, \quad AT_p, \quad L_{pq}$$

de M qui vérifie les points suivants:

- Le groupe T_p préserve les horosphères basées en p et agit simplement transitivement (par isométrie, même par translations⁽⁵⁾) sur chaque horosphère centrée en p et sur $\partial X \setminus \{p\}$.

4. C'est vrai pour tout choix d'horosphères et donc de métriques.

5. Puisqu'une horosphère est isométrique à un espace euclidien, cela a un bien un sens d'agir par translation.

- Le groupe A_{pq} préserve la géodésique $]p, q[$, agit par translation dessus. Si $g \in A_{pq}$, on dit que g pousse vers p (resp. vers q), si pour un/tout $x \in]p, q[$, $g(x)$ est entre x et p (resp. q). Si g pousse vers p alors g contracte les horosphères centrées en p , et dilate les horosphères centrées en q . **Dessin.** Enfin, l'action induite sur $\partial X \setminus \{p\}$ est une action par homothétie.
- Le groupe AT_p agit simplement transitivement sur X . L'action induite sur $\partial X \setminus \{p\}$ est une action par homothétie-translation.
- Le groupe I_p préserve les horosphères centrées en p , et agit sur $\partial X \setminus \{p\}$ par isométrie.
- Le groupe L_{pq} préserve la géodésique $]p, q[$, en fixant tous ses points et préserve toutes les horosphères centrées en p et en q . Il agit par isométrie sur les horosphères centrées en p , en q , sur $\partial X \setminus \{p\}$ et $\partial X \setminus \{q\}$, en fixant le point $]p, q[\cap \mathcal{H}$, q , p , respectivement.

..... Fin du cours 5

11. Topology

11a. General remark. — If X, Y are locally compact metrizable topological space then the space of continuous function from $X \rightarrow Y$ is endowed with the *compact-open topology*, meaning that $f_n \rightarrow f_\infty$ when $f_n \rightarrow f_\infty$ uniformly on the compact subset of X .

In more fancy words, the *compact-open topology* is the topology that admit as a prebasis for the open set, the family $V(K, U)$, for every compact $K \subset X$, for every open set $U \subset Y$, where $V(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$.

The composition operator between $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$ is continuous. So, we put on M the topology induced by the compact-open topology on $\mathcal{C}(X, X)$. The following remark simplify the life:

11b. Remark useful to study M . —

Remarque. — The spaces $X = B^d, U^d$ are included in the compact spaces $\overline{X} \subset \mathbb{R}^{\hat{d}}$ and any Möbius transformation is defined on the compact $\mathbb{R}^{\hat{d}}$ and any Möbius transformation is determined by its restriction to ∂X . Hence, the compact-open topology is also the topology given by the compact-open topology on $\mathcal{C}(\overline{X}, \overline{X})$ or $\mathcal{C}(\partial X, \partial X)$ which are metrizable⁽⁶⁾ (since \overline{X} and ∂X are compact metrizable space) by, choose any distance dist on \overline{X} or ∂X , set:

$$d_M(g, h) = \sup\{\text{dist}(g(x), h(x)) \mid x \in \overline{X} \text{ ou } \partial X\}$$

This distance is invariant by composition on the right (not on the left):

$$\forall g, h, \phi \in M, \quad d_M(g \circ \phi, h \circ \phi) = d_M(g, h)$$

Proposition 11.1. — *The application $M \rightarrow M$ given by $g \mapsto g^{-1}$ is continuous.*

Proof. — We may assume that $X = B^d$. Let $g_n \rightarrow g_\infty$.

$$d_M(g_n^{-1}, g_\infty^{-1}) = d_M(g_n^{-1} \circ g_n, g_\infty^{-1} \circ g_n) = d_M(g_\infty^{-1} \circ g_\infty, g_\infty^{-1} \circ g_n) \leq \text{Lip}(g_\infty^{-1})d(g_n, g_\infty)$$

6. Hence, all question of topology should be done with sequences.

where $\text{Lip}(g_\infty^{-1})$ is the Lipschitz constant of g_∞^{-1} which is finite since g_∞^{-1} is a diffeomorphism of the compact metric space $\overline{\partial B^d}$. \square

Hence, all the groups presented in this chapter have a topology and the composition and inversion are continuous hence they are topological groups.

12. Quelques décompositions

12a. Décomposition KAK . —

Théorème IV.11. — Soient $x \in X$, $p, q \in \partial X$ avec $x \in (p, q)$. On note $K = M_x$, $A = A_{pq}$ et A^+ ceux qui pousse vers p . L'application $K \times A^+ \times K \rightarrow M$ est surjective. Le facteur dans A^+ est unique, les autres non.

Proof. — Il existe (non unique) un $k_2 \in K$ tel que $y := k_2 g^{-1} x \in]q, x]$. Il existe un unique $a \in A^+$ tel que $a(y) = x$, on a bien $ak_2 g^{-1} \in K$. **It is cool to notice that a is given by $d(x, g(x))$.** \square

Corollaire IV.12. — The action $M \curvearrowright X$ is proper.

Proof. — If L_1, L_2 are two compacts of X then the set:

$$E = \{(g, x) \in M \times X \mid x \in L_1, g(x) \in L_2\}$$

is closed and included in $\pi_M(E) \times L_1$, but $\pi_M(E) \subset K \times A_R^+ \times K$ with $R = \text{diam}(L_1, L_2)$, hence compact. \square

12b. Décomposition d'Iwasawa. —

Théorème IV.13. — Soit $p, q \in \partial X$, soit $x \in]p, q[$, on note:

$$K = \text{Stab}_x \quad A = A_{p,q} \quad N = T_p$$

L'application $\varphi : K \times A \times N \rightarrow M$ est un difféo.

Proof. — L'application φ est bien continue, montrons qu'elle est surjective. Soit $g \in M$. On considère \mathcal{H} l'horosphère centrée en p et passant par $g^{-1}(x)$ et on note $y = \mathcal{H} \cap]p, q[$. Il existe un unique élément $n \in N = T_p$ tel que $ng^{-1}(x) = y$. Il existe un unique élément a tel que $a(y) = x$. On a $ang^{-1}(x) = x$, autrement dit $k := ang^{-1} \in K$.

Montrons l'injectivité. Si $g = kan$. On pose $y = ng^{-1}x$. Le point y est sur \mathcal{H} mais on a $y = a^{-1}k^{-1}x = a^{-1}x \in]p, q[$ d'où l'unicité, via l'unicité dans les existences du paragraphe précédent.

Pour montrer que c'est un homéo, il reste à montrer que φ est propre. Soit C un compact de M , l'ensemble $C^{-1}x$ est aussi compact puisque l'action de M sur X est propre. On reprend la démo de l'existence et on voit que les n et les a possibles vivent tous dans des compacts. \square

13. Similitudes : Décomposition de Jordan

Théorème IV.14 (Décomposition de Jordan des isométries euclidiennes)

Soit g une isométrie de \mathbb{E}^e . Alors, il existe un unique couple (t, f) tel que $g = ft = tf$ où t est une translation et f une isométrie qui possède un point fixe.

Remarque. — Nécessairement dans une telle décomposition, si $t = T_v$ alors $\vec{f}(v) = v$.

Proof. — Idée. Le point c'est de se rappeler que $fT_vf^{-1} = T_{\vec{f}(v)}$, donc f et T_v commutent si et seulement si $v \in \ker(\vec{f} - Id)$. Et, $\mathbb{R}^d = \ker(\vec{f} - Id) \oplus \text{Im}(\vec{f} - Id)$

Maintenant, si on se donne g une isométrie, et on cherche v et f tels que: f et T_v commutent et $g = fT_v$ alors on doit avoir $v \in \ker(\vec{f} - Id) = \ker(\vec{g} - Id)$. On laisse la conclusion et la rédaction en exo. □

Théorème IV.15 (Décomposition de Jordan des similitudes euclidiennes)

Soit g une similitude de \mathbb{E}^e qui n'est pas une isométrie. Alors, il existe un unique couple (h, f) tel que $g = hf = fh$ où h est une homothétie et une isométrie f .

Remarque. — Nécessairement dans une telle décomposition f fixe le centre de h qui doit être l'unique point fixe de g .

Théorème IV.16. — *Toute similitude d'un espace euclidien qui n'est pas une isométrie possède un unique point fixe.*

Proof. — On peut supposer que le rapport λ de f est < 1 . On se donne un x et on introduit la suite $x_n = f^n(x)$, elle vérifie: $d(x_{n+1}, x_n) = \lambda^n d(f(x), x)$, donc $(x_n)_n$ est de Cauchy, donc converge, donc:

$$x_\infty \leftarrow x_{n+1} = f(x_n) \rightarrow f(x_\infty)$$

Pour l'unicité, une similitude qui possède deux points fixes a un rapport égal à 1 donc est une isométrie. □

Proof. — Exo. □

CHAPTER V

CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DE \mathbb{H}

1. Enoncé

On note $\text{Fix}(g)$ l'ensemble des points fixes de g sur $\overline{\mathbb{H}}$. On note $\tau(g)$ la *distance de translation* de g , définie comme:

$$\tau(g) = \inf_{x \in \mathbb{H}} d(x, g \cdot x)$$

Définition. — Soit $g \in M$.

- Si g possède un point fixe dans X alors on dit que g est *elliptique*.
- Si g n'est pas elliptique, possède un unique point fixe $p \in \partial X$ et agit par translation sur $\partial X \setminus \{p\}$ alors on dit que g est *parabolique pur*.
- Si g n'est pas elliptique, possède un point fixe $p \in \partial X$ et agit par homothétie sur $\partial X \setminus \{p\}$ alors on dit que g est *hyperbolique pur*.

Proof. — Dans la 3ème définition, il faut montrer que cela ne dépend pas du choix du point fixe. □

Théorème V.1 (Théorème-Définition + Décomposition de Jordan)

Soit $g \in G$. On a 3 cas.

1. $\text{Fix}(g) \cap \mathbb{H} \neq \emptyset$, g est elliptique.
2. $\text{Fix}(g) \cap \mathbb{H} = \emptyset$ et $\text{Fix}(g) \cap \partial \mathbb{H} = \{\bullet\}$ dans ce cas, on dit que g est parabolique. Tout élément parabolique se décompose de façon unique en un produit commutatif d'un parabolique pur et d'un elliptique ⁽¹⁾.
3. $\text{Fix}(g) \cap \mathbb{H} = \emptyset$ et $\text{Fix}(g) \cap \partial \mathbb{H} = \{\bullet, \star\}$ dans ce cas, on dit que g est hyperbolique ⁽²⁾. Tout élément hyperbolique se décompose de façon unique en un produit commutatif d'un hyperbolique pur et d'un elliptique qui préserve $\{\bullet, \star\}$.

Théorème V.2 (Théorème-Description). — De façon plus précise:

1. Si g est elliptique alors:
 - la quantité $\tau(g) = 0$ et l'inf est atteint.
 - l'élément g préserve toute sphère centrée sur un point fixe.
 - toutes les orbites de l'action de g sur \mathbb{H} sont bornées.
2. Si g est parabolique alors:
 - la quantité $\tau(g) = 0$ et l'inf n'est pas atteint.

1. Nécessairement, dirigé par le parabolique pur.
2. éventuellement aussi loxodromique.

- aucune orbite de l'action de g sur \mathbb{H} n'est bornée.
- toutes les orbites positives et négatives convergent vers le point fixe p .
- l'élément g préserve chacune des horosphères basées en p .
- l'élément g permute les droites passant par p .
- l'élément g agit par isométrie sur $\partial\mathbb{H} \setminus \{p\}$.

3. Si g est hyperbolique alors:

- la quantité $\tau(g) > 0$ et l'inf est atteint.
- aucune orbite de l'action de g sur \mathbb{H} n'est bornée.
- toutes les orbites positives (resp. négatives) convergent vers le point fixe attractif p^+ (resp. répulsif p^-).
- l'élément g contracte (resp. dilate) les horosphères basées en p^+ (resp. répulsif p^-).
- l'élément g permute les droites passant par p^+ (resp. p^-).
- l'élément g agit par isométrie sur $\partial\mathbb{H} \setminus \{p\}$ par similitude de rapport non-trivial.

2. Existence de barycentre

Proposition 2.1. — Soit B un convexe compact de \mathbb{H} . Il existe un point $x_B \in B$ tel que si g est une isométrie telle que $g(B) = B$ alors $g(x_B) = x_B$.

Proof. — On regarde B sur le demi-hyperboloïde. On le regarde donc dans \mathbb{R}^{d+1} , ici B est compact mais il n'est pas convexe comme sous-ensemble de \mathbb{R}^{d+1} , on note E son enveloppe convexe. On note y_B le centre de gravité⁽³⁾ de E , et on note $x_B = (0y_B) \cap \mathbb{H}$. L'élément g agit par transformation linéaire (donc affine sur \mathbb{R}^{d+1}), il préserve donc y_B , et par suite x_B . □

Corollary 2.2. — Soit L un sous-groupe compact de G alors L est inclus dans un conjugué de K .

Proof. — Soit $x \in \mathbb{H}$, on note B l'enveloppe convexe de $L \cdot x$. Le groupe L fixe donc le point x_B , de plus il existe $g \in G$ tel que $g(x_B) = O$, par suite $gLg^{-1} \leq K$, et donc ... □

3. Existence de points fixes

On a déjà vu que le diamètre euclidien de la boule de centre x_n et de rayon R tend vers 0 dans le modèle de la boule conforme.

Lemme V.3 (Lemme des compagnons de voyage - Fellow traveler)

Soit $\mathbb{H} \ni (x_n)_n \rightarrow x_\infty \in \partial\mathbb{H}$. Soit $(y_n)_n \in \mathbb{H}$ tel que $(d(x_n, y_n))_n \leq R$. Alors $y_n \rightarrow x_\infty$.

Corollaire V.4. — Soit $g \in G$, g fixe un point de $\overline{\mathbb{H}}$.

..... Fin du cours 6

3. Rappel: On définit la fonction de Leibniz de B par $f(M) = \int_B \overrightarrow{Mx} dx$, au lieu de $f(M) = \sum m_i \overrightarrow{Mx_i}$ Rq: si $M = O$, alors $f(O) = \int_B x dx$. Et, on a comme d'habitude $f(M) = \text{Vol}(B) \overrightarrow{MN} + f(N)$, on en déduit facilement l'existence et l'unicité d'un point tel que $f(M) = 0$. On baptise ce point le barycentre de B , et il est clair qu'il est équivariant par transformation affine, et donc invariant par transformation affine qui préserve B .

Proof. — Soit $x \in \mathbb{H}$. Si $(g^n \cdot x)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée alors on prend l'enveloppe convexe, puis le barycentre et on obtient un point fixe, ce qui montre que g est elliptique.

Si $(g^n \cdot x)_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas bornée, alors il existe un point d'accumulation de cette suite $p \in \partial\mathbb{H}$, il existe n_i tel que $g^{n_i} \cdot x \rightarrow p$.

Les deux suites $x_i = g^{n_i} \cdot x \rightarrow p$ et $y_i = g^{n_i} \cdot gx \rightarrow ?$ sont à distance bornée, donc $? = p$. Par suite,

$$p \leftarrow (g^{n_i} \cdot gx)_i = (g \cdot g^{n_i} x)_i \rightarrow g \cdot p$$

donc $g \cdot p = p$. □

Remarque. — Bonus: tout point d'accumulation d'une orbite est un point fixe.

4. La démo du théorème-définition

Proof. — Soit $g \in G$. S'il existe une orbite bornée alors on a vu que g est elliptique (et tous les points du théorème-description sont démontrés). Supposons donc que g n'a aucune orbite bornée. Le lemme ... montre qu'alors g fixe un point $p \in \partial\mathbb{H}$.

On peut supposer que $\mathbb{H} = U^d$ et $p = \infty$. On obtient donc que l'action de g sur $\partial\mathbb{H} \setminus \{p\}$ est une action par similitude.

- **Cas 1:** L'élément g agit par isométrie sur $\partial\mathbb{H} \setminus \{p\}$, dans ce cas g préserve les horosphères centrées en p , permutent les droites concourantes en p . Toute isométrie se décompose comme un produit commutatif entre une translation de vecteur u et une isométrie fixant tous les points d'une droite parallèle à u . Le vecteur u est non nul sinon les orbites de g sur \mathbb{H} serait bornée. On obtient donc que g se décompose comme un produit commutatif parabolique pur et elliptique dirigé par l'axe du parabolique pur.

L'action de g sur $\partial\mathbb{H} \setminus \{p\}$ est propre, autrement dit les orbites partent à l'infini, autrement dit les orbites positives (resp. négatives) convergent vers p . Via les horosphères et les droites concourantes en p , on en déduit le même résultat pour les orbites sur \mathbb{H} . Le Lemme pour les paras montre que $\tau(g) = 0$, comme g n'a pas de points fixes sur X , l'inf n'est pas atteint.

- **Cas 2:** L'élément g agit par similitude non-isométrie sur $\partial\mathbb{H} \setminus \{p\}$, il possède donc un autre point fixe q . Toute similitude non-isométrie se décompose comme un produit commutatif entre une homothétie et une isométrie fixant le point fixe de l'homothétie. On obtient donc que g se décompose comme un produit commutatif hyperbolique pur et elliptique fixant le point fixe différent de p de l'hyperbolique pur. Tous les points du théorème description s'en déduisent sauf $\tau(g) > 0$ et atteint.

On va montrer que pour tout $x \in]p, q[$, pour tout $y \in X$, on a:

$$d(x, g(x)) \leq d(y, g(y)) \quad \text{avec égalité si et seulement si } y \in]p, q[$$

Soit $y \in U^d \setminus]p, q[$, soit \mathcal{H} l'horosphère centrée en ∞ et contenant y . On note $x = \mathcal{H} \cap]p, q[$. La quantité $d(x, g(x))$ ne dépend pas de $x \in]p, q[$ puisque g agit par translation sur $]p, q[$. **Faire un dessin**. Le Lemme pour les hyperbos montrent que:

$$d(y, g(y)) > d(y, g(\mathcal{H})) = d(x, g(x)).$$

□

Faudrait mieux rédiger.

CHAPTER VI

L'ESPACE HYPERBOLIQUE EST GROMOV-HYPERBOLIQUE

1. Définition

Définition. — A length metric space is *Gromov-hyperbolic* when the triangles are thin !
Meaning:

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x, y, z \in X, \quad \forall [x, y], [y, z], [z, x], \quad \text{s.t.}$$

$$d([y, z], [x, y] \cup [x, z]) \leq \delta$$

the picture.

Exemple. — A compact length metric space... \mathbb{R} , A tree.

Non-exemple. — \mathbb{R}^d for $d \geq 2$. Puisqu'il existe des homothéties...

Théorème VI.1. — *L'espace hyperbolique est Gromov-hyperbolique.*

2. Démo Conforme

Proof. — Supposons que ce ne soit pas le cas. Then there exists a sequence of triangle more and more fat ! Meaning, there exists $x_n, y_n, z_n \in \mathbb{H}$ and $u_n \in [y_n, z_n]$ such that:

$$d(u_n, [x_n, z_n] \cup [x_n, y_n]) \rightarrow \infty$$

Thanks to G , we can assume that u_n is constant, thanks to extraction we can assume that x_n, y_n, z_n converges to $x_\infty, y_\infty, z_\infty \in \overline{\mathbb{H}}$.

Now, $d(u_n, x_n) \rightarrow \infty$ and $u_\infty \in \mathbb{H}$ so $x_\infty \in \partial\mathbb{H}$, same argument gives $y_\infty, z_\infty \in \partial\mathbb{H}$.

Now, if $x_\infty \neq y_\infty$ then we get that ⁽¹⁾ $d(u_\infty,]x_\infty, y_\infty[) < \infty$ this is absurd, hence $x_\infty = y_\infty$, same argument gives $x_\infty = z_\infty$, hence $x_\infty = y_\infty = z_\infty$, which imply that $u_\infty = x_\infty = y_\infty = z_\infty$.
ABSURD, because $u_\infty \in \mathbb{H}$. □

1. Thanks to the strict-convexity of \mathbb{H} , if you picture the projective model, or because we know what the geodesic are in the conformal model.

CHAPTER VII

ACTION DE GROUPE ET TOPOLOGIE

Contents

1. Variété topologique	49
2. Action errante, séparante...	52
3. ...libre, proprement discontinue	53
4. Avec un groupe de Lie	53
5. Lemme de Selberg	55
6. Surface	55

Definition 0.1. — On dit qu'une suite de points $(x_n)_n$ d'un espace topologique (localement compact) tend vers $l'∞$ lorsqu'elle sort de tout compact.

1. Variété topologique

Definition 1.1. — Un espace topologique X est une *variété topologique* de dimension d lorsque:

- X est séparé, à base ⁽¹⁾ dénombrable,
- Pour tout $x \in X$, il existe un ouvert $\mathcal{U} \ni x$ et un homéo $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^d$.

Exemple. —

- Un ouvert de \mathbb{R}^d . Une sous-variété de \mathbb{R}^d . Une variété différentielle.
- Une variété moins un fermé. Un ouvert d'une variété.
- Le bord d'un cône convexe.
- Exemple important pour ce cours : les surfaces connexes orientables (les dessiner), type fini vs type infini (culturel).
 - Surfaces de type fini, avec des disques ou des points en moins...
 - Monstre du Loch-Ness = $\Sigma_{\mathbb{N}}$, donné les deux dessins !
 - L'échelle de Jacob = $\Sigma_{\mathbb{Z}}$,
 - L'arbre de Cantor = Arbre de valence 3 gonflé $\simeq \mathbb{S}^2$ moins un/le Cantor.
 - L'arbre de Cantor fleuri = L'arbre de Cantor avec des anses.

1. Une base (d'ouverts) d'un espace topologique est un ensemble d'ouverts tel que tout ouvert est réunion d'éléments de la base.

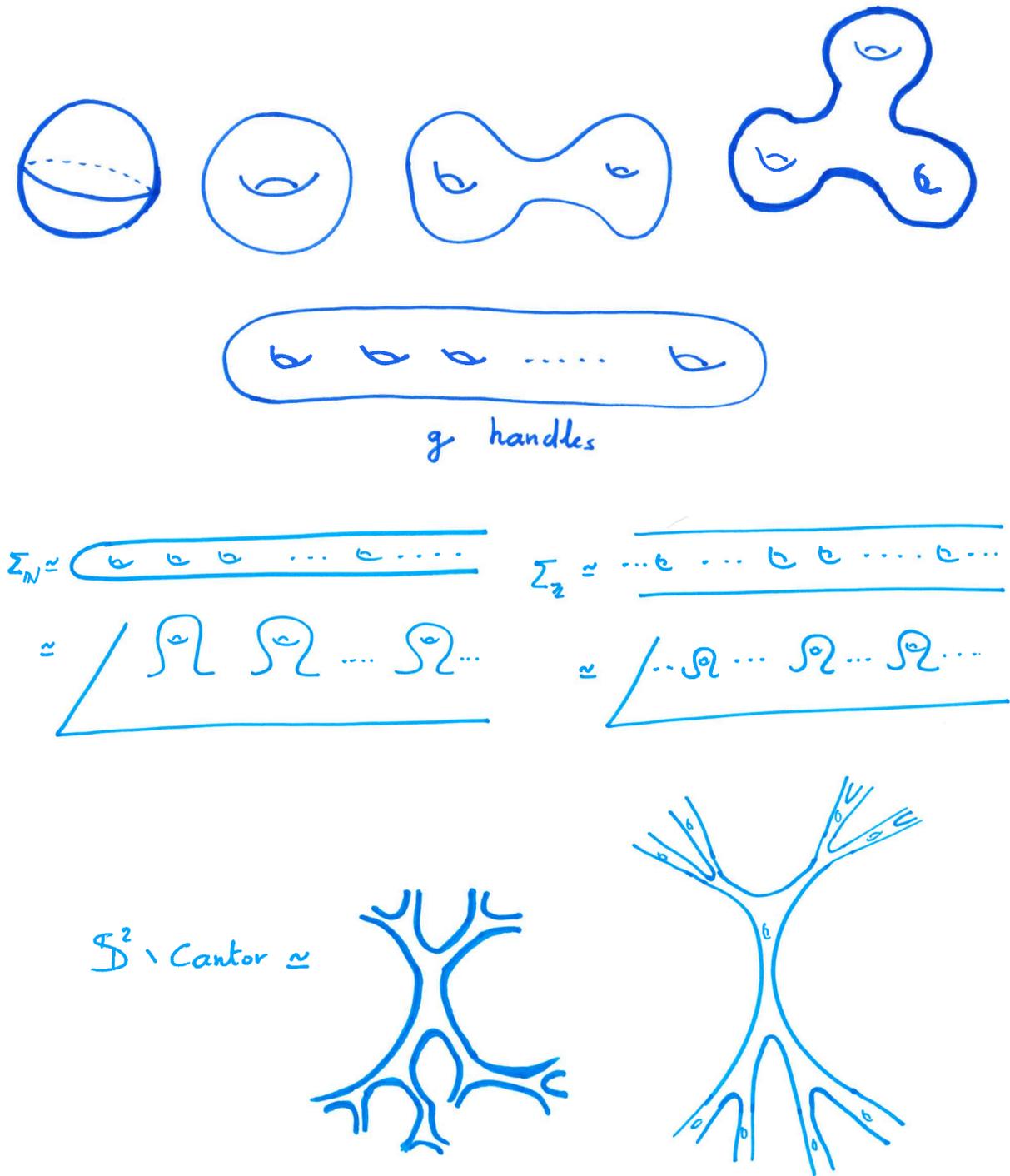


FIGURE 1. Surfaces of finite and infinite type

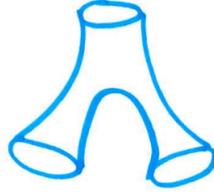


FIGURE 2. A pant

Definition 1.2. — Un espace topologique X est une *variété topologique à bord* de dimension d lorsque:

- X est séparé, à base dénombrable,
- Pour tout $x \in X$, il existe un ouvert $\mathcal{U} \ni x$ et un homéo $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}' \subset \{x_d \geq 0\}$.

L'intérieur de X est l'ensemble des points qui admettent un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^d , on le note $\overset{\circ}{X}$. Le complémentaire de l'intérieur s'appelle le *bord* de X , on le note ∂X .

Exemple. —

- Les variétés sont des variétés à bord dont le bord est vide
- Une variété à bord moins des disques/points disjoints est une variété à bord.
- Un convexe fermé de \mathbb{R}^d .
- Exemple important pour ce cours : les surfaces connexes compactes orientables à bord. Dessiner un pantalon.

Question VII.1. — Soit $\Gamma \leq \text{Isom}^+(\mathbb{H}^d)$ un sous-groupe dénombrable à quelle condition a-t-on que \mathbb{H}^d/Γ est un espace séparé et $\pi : \mathbb{H}^d \rightarrow \mathbb{H}^d/\Gamma$ est un homéo local ?

Réponse finale Si et seulement si Γ est discret et sans torsion.

.....Fin Du Cours 07

2. Action errante, séparante...

changer errante en fortement errante.

Soit Γ un groupe dénombrable, et $\Gamma \curvearrowright X$ une action par homéo. On suppose X connexe, localement compact, séparé, à base dénombrable pour simplifier.

Lemme VII.2. — *L'application $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ est un homéo local si et seulement si l'action de Γ sur X est errante, i.e. pour tout $x \in X$, il existe \mathcal{U} ouvert contenant x , tel que:*

$$\gamma(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \Rightarrow \gamma = 1$$

Proof. — Supposons l'action errante. L'application π est continue par définition de la topologie quotient. Elle est aussi ouverte, car c'est un quotient par une action de groupe. En effet, soit \mathcal{V} un ouvert de X , on veut vérifier que $\pi(\mathcal{V})$ est un ouvert, par définition de la topologie quotient, $\pi(\mathcal{V})$ est un ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{V}))$ est un ouvert de X , or $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{V})) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\mathcal{V})$ qui est bien un ouvert.

Par conséquent, la restriction de π à \mathcal{V} est un homéo sur son image si et seulement si elle est injective. Si, on prend $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ l'ouvert donné par l'hypothèse, ça roule.

Supposons que π est un homéo local, soit $x \in X$ et \mathcal{U} un ouvert de X contenant x tel que $\pi|_{\mathcal{U}}$ est un homéo sur son image. On va montrer que l'ouvert \mathcal{U} est errant. En effet, soit γ tel que $\gamma(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. On veut montre que $\gamma = 1$. On introduit:

$$Y = \{y \in X \mid \gamma(y) = y\}$$

Il est clair que Y est un fermé de X . Montrons que Y est un ouvert de X , par connexité de X ceci montrera que $Y = X$ et donc que $\gamma = 1$. Soit $y \in Y$, soit \mathcal{V} un ouvert autour de y tel que $\pi|_{\mathcal{V}}$ est injective. Comme, pour tout $z \in \mathcal{V} \cap \gamma^{-1}(\mathcal{V})$, on a $z, \gamma(z) \in \mathcal{V}$ donc $z = \gamma(z)$ par définition de \mathcal{V} , donc le voisinage ouvert $\mathcal{V} \cap \gamma^{-1}(\mathcal{V})$ de y est inclus dans Y , donc Y est ouvert. \square

Lemme VII.3. — *Si l'action est errante alors elle est libre.*

Proof. — Soit $\gamma \in \Gamma$. Soit x un point fixe de γ et \mathcal{U} un ouvert errant contenant x . Par suite, $x = \gamma(x) \in \mathcal{U} \cap \gamma(\mathcal{U})$. Contradiction. \square

Definition 2.1. — L'action $\Gamma \curvearrowright X$ est *séparante* lorsque:

$$\forall x, y \in X, \Gamma \cdot x \cap \Gamma \cdot y = \emptyset \Rightarrow \exists \mathcal{U} \ni x, \exists \mathcal{V} \ni y, \text{ tel que } \Gamma \cdot \mathcal{U} \cap \Gamma \cdot \mathcal{V} = \emptyset$$

Remarque. — Clairement une action est séparante si et seulement si le quotient X/Γ est séparé.

Remarque. —

- L'action $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ donnée par $n \cdot (x, y) = (2^n x, 2^{-n} y)$ est errante et non-séparante.
- L'action $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2$ est séparante mais non-errante.
- Donc c'est pas la même chose.

Proposition 2.2. — *Soit X une variété topologique et $\Gamma \curvearrowright X$ une action par homéo d'un groupe dénombrable. Alors le quotient X/Γ est une variété topologique et $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ est un homéo local si et seulement si l'action est errante et séparante.*

3. ...libre, proprement discontinue

Definition 3.1. — L'action $\Gamma \curvearrowright X$ est *proprement discontinue* lorsque pour tout compact K de X , l'ensemble:

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$$

est fini.

Théorème VII.4. — L'action $\Gamma \curvearrowright X$ est errante et séparante si et seulement si elle est libre et proprement discontinue.

Proof. — On a déjà vu que errante implique libre. Montrons que errante + séparante implique proprement discontinue. Par l'absurde, soit K un compact tel que l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ est infini. Il existe donc une suite $(\gamma_n)_n$ d'éléments de Γ **tous distincts** et une suite $(x_n)_n$ de points de K tels que $y_n = \gamma_n(x_n) \in K$. Quitte à extraire, on peut supposer que x_n et y_n converge vers x_∞ et y_∞ .

Pour tous ouverts $\mathcal{U} \ni x_\infty$ et $\mathcal{V} \ni y_\infty$, on a que $x_n \in \mathcal{U}$ et $y_n \in \mathcal{V}$ pour n assez grand, et par suite $\gamma_n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$; donc on ne peut pas séparer les orbites $\Gamma \cdot x_\infty$ et $\Gamma \cdot y_\infty$. Par suite, il existe un $\delta \in \Gamma$ tel que $\delta(x_\infty) = y_\infty$. Comme $\delta^{-1}\gamma_n(x_n) \rightarrow x_\infty$, on a que pour n assez grand, $\delta^{-1}\gamma_n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, ce qui implique que $\gamma_n = \delta$ contradiction.

La réciproque. Soit $x \in X$. Soit $(\mathcal{U}_n)_n$ une suite décroissante d'ouverts contenant x , d'intersection $\{x\}$ et tous d'adhérence compacte. On commence par montrer que l'action est errante. On considère:

$$\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\mathcal{U}_n) \cap \mathcal{U}_n \neq \emptyset\} \subset \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\overline{\mathcal{U}_n}) \cap \overline{\mathcal{U}_n} \neq \emptyset\}$$

Comme l'action est P.D. ces ensembles sont finis, et par définition ils sont décroissants. Soit $\gamma \in \cap \Gamma_n$, il existe une suite de terme général $x_n \in \mathcal{U}_n$ tel que $\gamma(x_n) \in \mathcal{U}_n$. La suite $(x_n)_n$ converge vers x . Par passage à la limite, on obtient que $\gamma(x) = x$ donc $\gamma = 1$ puisque l'action est libre. Donc $\cap \Gamma_n = 1$, donc $\Gamma_n = 1$ pour n assez grand, ce qui signifie que l'ouvert \mathcal{U}_n est errant si n est assez grand.

Montrons que l'action est séparante. Soient $x, y \in X$ tel que $\Gamma \cdot x \cap \Gamma \cdot y = \emptyset$. On considère $(\mathcal{U}_n)_n$ et $(\mathcal{V}_n)_n$ comme dans le paragraphe précédent autour de x et y . On introduit:

$$\Gamma'_n = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\mathcal{U}_n) \cap \mathcal{V}_n \neq \emptyset\} \subset \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\overline{\mathcal{U}_n \cup \mathcal{V}_n}) \cap \overline{\mathcal{U}_n \cup \mathcal{V}_n} \neq \emptyset\}$$

Ces ensembles sont donc finis. Tout élément de $\cap \Gamma_n$ vérifie $\delta(x) = y$, donc $\cap \Gamma'_n = \emptyset$, donc si n est assez grand les orbites de \mathcal{U}_n et \mathcal{V}_n sont disjointes. \square

4. Avec un groupe de Lie

Soit G une sous-variété de $M_m(\mathbb{R})$ qui est un sous-groupe de $GL_m(\mathbb{R})$. Plus généralement, soit G un groupe de Lie, voir soit G un groupe topologique localement compact, σ -compact ⁽²⁾.

2. i.e réunion d'une suite croissante de compacts. Rq: Si Y est localement compact, alors σ -compact implique hémicompact, i.e dans la suite croissante précédente, on peut prendre K_n dans l'intérieur de K_{n+1} .

On dit que l'action $G \curvearrowright X$ est *propre* lorsque l'application $\varphi : G \times X \rightarrow X \times X$ donnée par $(g, x) \mapsto (x, g \cdot x)$ est propre.

Remarque. — Si G est un groupe discret alors $G \curvearrowright X$ est propre ssi l'action $G \curvearrowright X$ est proprement discontinue.

Proposition 4.1. — *Supposons que l'action $G \curvearrowright X$ est transitive. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- Pour tout / un $o \in X$, l'application $\pi_o : G \rightarrow X$ est propre.
- L'action $G \curvearrowright X$ est propre.
- Pour tout / un $o \in X$, le stabilisateur de o est compact.

De plus, dans ce cas, pour tout $o \in X$, l'application $\pi_o : G \rightarrow X$ induit un homéo entre G/K et X .

Proof. — On commence par 1) \Rightarrow 3). C'est trivial $\text{Stab}_o = \pi_o^{-1}(o)$. Ensuite 1) \Rightarrow 2). Soit L, M deux compacts de $X \times X$, on doit montrer que $\psi^{-1}(L \times M)$ est inclus dans un compact. On note $L', M' = \pi_o^{-1}(L), \pi_o^{-1}(M)$, ce sont des compacts de G par hypothèse. Enfin, $\psi^{-1}(L \times M) \subset M'KL'^{-1} \times L$, en effet, si $\psi(g, x) \in L \times M$ alors $x \in L$ et $gx \in M$. Il existe donc $m \in M', l \in L'$ tel que:

$$gx = mo \quad x = lo$$

Par suite, $m^{-1}glo = o$, autrement dit $m^{-1}gl \in K := \text{Stab}_o$ qui est compact car 1) \Rightarrow 3). Il vient que $g \in M'KL'^{-1}$ comme annoncé.

Ensuite, 2) \Rightarrow 3). C'est trivial aussi, $\text{Stab}_o = \psi^{-1}(\{o\} \times \{o\})$. Reste, 3) \Rightarrow 1), soit L_1 un compact contenant K dans son intérieur. Soit M un compact de X , on veut montrer $\pi_o^{-1}(M)$ est inclus dans un compact. Supposons que ce n'est pas le cas, il existe donc une suite $(g_n)_n$ d'éléments de X tel que $g_n o \in M$ et $g_n \rightarrow \infty$. Quitte à extraire et renuméroter, on peut supposer $g_n o$ converge vers $x \in X$. Mais $x = go$ pour un certain g , par suite $g^{-1}g_n o \rightarrow o$, donc $g^{-1}g_n$ est dans L_1 pour n assez grand puisque l'intérieur de L_1 contient K . Par suite, $(g_n)_n$ est contenu dans le compact gL_1 . Absurde.

Pour le "de plus", il suffit de remarquer que l'application induite est bijective, continue (par définition); et elle est propre par le point 2) donc c'est un homéo. \square

Proposition 4.2. — *Supposons que l'action $G \curvearrowright X$ est transitive et à stabilisateurs compacts. Soit Γ un sous-groupe de G , alors: l'action $\Gamma \curvearrowright X$ est proprement discontinue si et seulement si Γ est un sous-groupe discret de G .*

Proof. — Supposons $\Gamma \curvearrowright X$ P.D.. On fixe un $o \in X$. Soit \mathcal{U}_n une suite décroissante d'ouverts de G autour du neutre, d'adhérences compactes et d'intersection le neutre. On veut montrer que $\Gamma \cap \mathcal{U}_n = \{1\}$ pour n assez grand. On note $K_n = \overline{\mathcal{U}_n \cdot \mathcal{U}_n}$.

On note M_n le compact $K_n \cdot o$.

$$\Gamma \cap \mathcal{U}_n \subset \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \mathcal{U}_n \cap K_n \neq \emptyset\} \subset \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(M_n) \cap M_n \neq \emptyset\}$$

est fini puisque l'action est P.D. Par suite, il est réduit à l'identité si n est assez grand, autrement dit Γ est discret.

Supposons à présent, Γ discret. Soit L un compact de X . Alors, l'ensemble:

$$E = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(L) \cap L \neq \emptyset\} \subset \pi_G(\underbrace{\psi^{-1}(L \times L)}_{\text{compact!}})$$

donc E est compact, or E est discret donc E est fini. \square

Proposition 4.3. — Soit $\Gamma \leq \text{Isom}^+(\mathbb{H}^d)$.

- L'action $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^d$ est P.D. si et seulement si Γ est discret.
- L'action $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^d$ est P.D et libre ssi Γ est discret et sans torsion.

Proof. — La première équivalence est une simple conséquence du fait que l'action $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^d) \curvearrowright \mathbb{H}^d$ est transitive à stabilisateurs compacts.

Pour la seconde, il nous reste à montrer le lemme suivant: \square

Proposition 4.4. — Soit $\Gamma \leq \text{Isom}^+(\mathbb{H}^d)$ discret. L'action $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^d$ est libre si et seulement si Γ est sans torsion.

Proof. — Si $\gamma^m = 1$ alors toute orbite de γ est bornée, donc γ est elliptique et possède donc un point fixe; l'action $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^d$ n'est donc pas libre.

Supposons que l'action n'est pas libre. Il existe donc un γ et un x tel que $\gamma(x) = x$. Or, l'action est P.D puisque Γ est discret donc:

$$\langle \gamma \rangle \subset \{\delta \in \Gamma \mid \delta(\{x\}) \cap \{x\}\}$$

est fini, on obtient que γ est d'ordre fini. \square

5. Lemme de Selberg

Théorème VII.5 (Lemme de Selberg). — Tout sous-groupe de type fini de $\text{GL}_m(\mathbb{C})$ est virtuellement sans torsion.

Admis: Le cas $\Gamma = \text{SL}_m(\mathbb{Z})$ contient presque toutes les difficultés, possibilité de le faire en oral de fin de semestre. Pour le cas général, il suffit d'être un peu plus à l'aise en algèbre commutative. On peut aussi faire celui-là en fin de semestre.

6. Surface

Théorème VII.6 (Classification des surfaces fermées). — Soit Σ une surface (topologique) orientable fermée (compacte sans bord) alors il existe un unique $g \geq 0$ tel que $\Sigma \simeq \Sigma_g$, où faire les dessins. L'entier g s'appelle le genre de Σ .

Théorème VII.7 (Classification des surfaces compactes à bord)

Soit Σ une surface (topologique) orientable compacte (à priori avec bord) alors il existe un unique couple $(g, p) \geq 0$ tel que $\Sigma \simeq \Sigma_{g,p}$, où $\Sigma_{g,p}$ est la surface de genre g privé de p disques ouverts disjoints.

Dessin de la forme canonique des surfaces. Explication pour l'octogone. Si besoin: [google: From an octagon to a genus 2 surface \(normalement la première réponse est une vidéo youtube de Jos Leys\)](https://www.youtube.com/watch?v=...); Voir aussi: <http://www.josleys.com>

CHAPTER VIII

GROUPES KLEINÉENS: LES NOTIONS DE BASES

Contents

1. L'ensemble limite	57
2. Sous-groupes élémentaires	58
3. Quelques lemmes	59
4. Classification des sous-groupes élémentaires	59
5. Action de convergence	61
5a. Définition	61
5b. Définition alternative	61
6. L'ensemble limite II	62
6a. Les lemmes	62
6b. Structure de l'ensemble limite	63
7. Le domaine de discontinuité	64
8. Domaine fondamental de Dirichlet	65
9. Quelques conséquences	65

Remarque. — Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^d)$ discret. Par suite, $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^d$ est proprement discontinue, en particulier, pour tout $x \in \mathbb{H}^d$, l'application $\Gamma \rightarrow \mathbb{H}^d$ définie par $\gamma \mapsto \gamma \cdot x$ est propre. L'orbite $\Gamma \cdot x \subset \mathbb{H}^d$ n'a donc pas de points d'accumulations dans \mathbb{H}^d .

1. L'ensemble limite

Lemme VIII.1. — Soit G un sous-groupe (quelconque) de $\text{Isom}(\mathbb{H}^d)$. Pour tout $x, y \in \mathbb{H}^d$, on a $\overline{G \cdot x} \cap \partial\mathbb{H}^d = \overline{G \cdot y} \cap \partial\mathbb{H}^d$

Définition 1.1. — On appelle le fermé $\overline{G \cdot x} \cap \partial\mathbb{H}^d$ l'ensemble limite de G , on le note Λ_G .

Exercice. — On a $\Lambda_G = \Lambda_{\overline{G}}$. On aura tendance à supposer G fermé dans la suite.

Proposition 1.2. — L'ensemble limite de G est G -invariant et contient tous les points fixes des éléments paraboliques et hyperboliques de G .

Proof. — Exo. □

Proof of Lemma VIII.1. — Soit $\gamma_n \in G$ tel que $\gamma_n \cdot x \rightarrow p \in \partial\mathbb{H}^d$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\gamma_n \cdot y \rightarrow p$, c'est une application du lemme des compagnons de voyage. En effet, $d(\gamma_n \cdot x, \gamma_n \cdot y) = d(x, y)$ et $\gamma_n \cdot x \rightarrow p$, d'où la conclusion. □

2. Sous-groupes élémentaires

Definition 2.1. — Soit $G \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^d)$ discret. On dit que G est *élémentaire* lorsque G possède une orbite finie dans $\overline{\mathbb{H}^d}$, sinon G est *non-élémentaire*.

Remarque. — Si Γ est non-élémentaire alors Λ_Γ est infini.

.....Fin Du Cours 08

3. Quelques lemmes

Lemme VIII.2. — *The action of $\text{Isom}(\mathbb{H}^d)$ on $\partial\mathbb{H}^d$ is 3-transitive if $d \geq 3$. If $d = 2$, it is 3-transitive on ordered triple.*

Proof. — On a déjà vu que l'action était 2-transitive, il reste donc à montrer que l'action $\text{Stab}_{0,\infty} \curvearrowright \mathbb{R}^{d-1} \setminus \{0\}$ est transitive. Rappel: $\text{Stab}_{0,\infty} = \mathbb{R}_+^* \times \text{O}_{d-1}(\mathbb{R})$, c'est clair ! \square

Lemme VIII.3. — *Let p, q, r be 3 distincts points of $\partial\mathbb{H}^d$, the stabilizer of $\{p, q, r\}$ is a compact subgroup of $\text{Isom}(\mathbb{H}^d)$.*

Proof. — We may assume that $\mathbb{H}^d = U^d$, $p = \infty$, $q = 0$ et $r = e_1$, hence the pointwise stabilizer of $\{p, q, r\}$ is the compact group $\text{O}(e_1^\perp)$ which is compact. \square

Lemme VIII.4. — *Let K be a compact group and $g \in K$ of infinite order then $\langle g \rangle$ is not discrete.*

Proof. — Tout sous-ensemble infini d'un espace compact possède un point d'accumulation donc n'est pas discret. \square

L'intersection de deux sous-ensembles préservés est préservée.

Lemme VIII.5. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\text{Isom}(\mathbb{E}^e)$. Un sous-espace F préservé par Γ est minimal si et seulement si F/Γ est compact. Deux tels sous-espaces sont parallèles et de même dimension.*

Proof. — Exo. \square

Théorème VIII.6 (Bieberbach's Theorem). — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\text{Isom}(\mathbb{E}^e)$ tel que \mathbb{E}^e/Γ est compact. Alors le sous-groupe des translations de Γ est isomorphe à \mathbb{Z}^e et d'indice fini dans Γ .*

4. Classification des sous-groupes élémentaires

Proposition 4.1 (Classification des groupes élémentaires)

Soit $G \leq \text{Isom}^+(\mathbb{H}^d)$ un groupe élémentaire. On les équivalences suivantes:

- G possède une orbite finie dans \mathbb{H}^d .
- G fixe un point de \mathbb{H}^d .
- \overline{G} is compact.
- $\Lambda_G = \emptyset$.

Dans ce cas \overline{G} est composé uniquement d'éléments elliptiques.

Proof. — 1) \Rightarrow 2) a déjà été vu plusieurs fois. 2) \Rightarrow 3) car si G fixe x alors $G \subset \text{Stab}_x$ qui est compact. 3) \Rightarrow 4) car toutes les orbites de G sont incluses dans un compact. 4) \Rightarrow 1) car si $\Lambda_G = \emptyset$, alors pour tout $x \in \mathbb{H}^d$, l'orbite $G \cdot x$ est borné puisqu'elle n'a pas de points d'accumulations dans le compact $\overline{\mathbb{H}^d}$, son centre de gravité est donc fixé par G , donc G est borné. \square

Proposition 4.2. — *Soit G un groupe composé uniquement d'éléments elliptiques. Si $d = 2, 3$ ou G est discret ou G est virtuellement résoluble alors G fixe un point de \mathbb{H}^d .*

Proof. — On ne fait que le cas G est discret. Supposons que G ne fixe pas de point de \mathbb{H}^d . On a alors $\Lambda_G \neq \emptyset$ par la partie précédente. On peut donc voir G comme un sous-groupe de \mathbb{E}^{d-1} . Le sous-groupe des translations de G est triviale donc les sous-espaces minimaux de G sont des points. Mais G admet un sous-espace minimal donc G fixe un point de \mathbb{R}^{d-1} , et aussi du coup un point de \mathbb{H}^d . \square

Proposition 4.3. — Soit $G \leq \text{Isom}^+(\mathbb{H}^d)$ un groupe élémentaire sans point fixe dans \mathbb{H}^d . On a deux cas:

- Il existe un unique point fixe $p \in \partial\mathbb{H}^d$, alors:
 1. l'orbite de tout point $q \neq p$ est infinie.
 2. Si $\Lambda_G = \{p\}$ alors tout élément de G est elliptique ou parabolique.
 3. Si $\Lambda_G \supset \{p, q\}$ avec $q \neq p$ alors il existe un élément hyperbolique dans G et Λ_G est infini.
 4. Si G est discret alors $\Lambda_G = \{p\}$ et tout élément d'ordre infini de G est parabolique.
 5. Si G est discret alors G possède un sous-groupe d'indice fini composé uniquement de translations. En particulier, G est virtuellement \mathbb{Z}^k avec $k \leq d - 1$.
- Il existe deux points distincts $p, q \in \partial\mathbb{H}^d$ échangés ou fixés, alors:
 1. l'orbite de tout point $r \neq p, q$ est infinie.
 2. Tout élément de G est elliptique ou hyperbolique.
 3. Il existe un élément hyperbolique $\gamma_0 \in G$ fixant p et fixant q .
 4. $\Lambda_G = \{p, q\}$.
 5. Si G est discret alors $\langle \gamma_0 \rangle$ est d'indice fini dans G . En particulier, G est virtuellement \mathbb{Z} .

Proof. — Comme G est élémentaire, il existe une G -orbite finie $\mathcal{O} \subset \mathbb{H}^d$. Le groupe G possède un sous-groupe d'indice fini H qui fixe tous les points de \mathcal{O} . Donc, si $\#\mathcal{O} \geq 3$ alors H est compact et donc G aussi. Absurde puisque G n'a pas de points fixes sur \mathbb{H}^d . Donc, ou bien G possède:

- un unique point fixe et tous les autres points ont une orbite finie
- deux points fixes et tous les autres points ont une orbite infinie.
- deux points échangés et tous les autres points ont une orbite infinie.

Supposons qu'il existe un unique point fixe $p \in \partial\mathbb{H}^d$, alors:

1. Déjà fait.
2. Si
3. Si $\gamma \in G$, γ est hyperbolique alors Λ_G contient les deux points fixes de γ .
4. Si tous les éléments de G sont paraboliques ou elliptiques alors l'orbite de tout point $x \in \mathbb{H}^d$ est incluse dans l'horosphère centrée en p et passant par x .
5. On suppose à présent que G est discret. Si γ est elliptique alors $\langle \gamma \rangle$ est inclus dans un groupe compact donc γ est d'ordre fini. Le groupe G ne peut contenir que des elliptiques, il contient donc un élément d'ordre infini, donc ou bien:
 - tous les éléments de G d'ordre infini sont paraboliques, ou bien
 - G contient deux hyperboliques d'axes distincts passant par p , ou bien
 - G contient un hyperbolique fixant p et un parabolique fixant p .

Dans les deux derniers cas, le groupe engendré par deux tels éléments dans $\text{Sim}(\mathbb{E}^{d-1})$ est non-discret

6. Enfin, G est un sous-groupe du groupe $\text{Isom}(\mathbb{R}^{d-1})$. Le reste c'est Bieberbach.

Supposons qu'il existe deux points distincts $p, q \in \partial\mathbb{H}^d$ échangés ou fixés, **Stop here before holiday**

1. Si $\gamma \in G$ est parabolique alors il doit échanger p et q et donc avoir un point fixe $r \neq p, q$; mais alors $r \in \Lambda_G$. Absurde.
2. La géodésique $]p, q[$ est préservée par Γ , si tous les points de $]p, q[$ sont fixés alors G possède un point fixe dans \mathbb{H}^d . Absurde, donc G possède un élément hyperbolique.
3. On suppose à présent, G discret. Quitte à prendre un sous-groupe d'indice 1 ou 2, on peut supposer que l'orientation de $]p, q[$ est aussi préservée. Or, cette géodésique est isométrique à \mathbb{R} , et le groupe des isométrie directe de \mathbb{R} s'identifie au translation donc à \mathbb{R} . Le groupe G agit de façon proprement discontinue sur \mathbb{R} , son image $\text{Im}(\Gamma \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{R}))$ est sous-groupe discret de \mathbb{R} . Or, tout sous-groupe discret de \mathbb{R} est cyclique donc $\text{Im}(\Gamma \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{R}))$ est cyclique engendré par une transformation hyperbolique; et le noyau fixe chaque point de l'axe, il est donc fini car l'action est P.D.

□

5. Action de convergence

5a. Définition. —

Definition 5.1. — L'action d'un groupe G sur un compact (métrisable) X est une *action de convergence* lorsque:

Pour toute suite $(g_n)_n$ d'éléments de G tendant vers l'infini, il existe une extractrice $(n_k)_k$, deux points $p, q \in X$ tels que pour tout ouvert $\mathcal{U} \ni p$, pour tout ouvert $\mathcal{V} \ni q$, on a $g_{n_k}(\mathcal{V}^c) \subset \mathcal{U}$.

Remarque. — Si $(*)$ est vérifiée par $(g_n)_n$ pour le couple (p, q) alors $(*)$ est vérifiée par $(g_n^{-1})_n$ pour le couple (q, p) . On note $g_{n_k} \rightarrow \delta_{p,q}$.

Remarque. — Un tel couple (p, q) s'il existe est unique, en effet, on a pour tout $x \neq q$, $\gamma_{n_k} \cdot x \rightarrow p$ et $x \neq p$, $\gamma_{n_k}^{-1} \cdot x \rightarrow q$.

Proposition 5.2. —

- $g \circ \delta_{p,q} = \delta_{g(p),q}$ et $\delta_{p,q} \circ g = \delta_{p,g^{-1}q}$
- $(g_n)_n \rightarrow \delta_{p,q} \iff (g_n^{-1})_n \rightarrow \delta_{q,p}$.
- Si g est hyperbolique alors $g^n \rightarrow \delta_{g^+,g^-}$;
- Si g est parabolique alors $g^n \rightarrow \delta_{g^+,g^+}$.

Remarque. — Si H est un sous-groupe de G alors l'action de H sur X est aussi une action de convergence.

5b. Définition alternative. —

Definition 5.3. — L'ensemble des applications *quasi-constantes* est l'ensemble des applications $\delta_{p,q} : \overline{\mathbb{H}^d} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^d}$, avec $p, q \in \partial\mathbb{H}^d$ définie par $\delta_{p,q}(x) = p$ si $x \neq q$ et $\delta_{p,q} = q$ si $x = q$.

Les applications quasi-constantes sont des applications quasi-projectives.

Definition 5.4. — Si g est un endomorphisme de V alors g induit une application $\bar{g} : \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\ker(g)) \rightarrow \mathbb{P}(\text{Im}(g))$. Une telle application s'appelle une *application quasi-projective*.

En effet, si $p \neq q$ alors la projection sur p parallèlement à $T_q \partial \mathbb{H}^d$ induit $\delta_{p,q}$. Et, si $p = q$ alors, soit H un hyperplan qui ne rencontre pas $\overline{\mathbb{H}^d}$, la projection sur p parallèlement à H induit $\delta_{p,p}$. Le résultat sur $\overline{\mathbb{H}^d}$ ne dépend pas de H .

Proposition 5.5. — Soit $(g_n)_n \in \text{SO}_{d,1}^+(\mathbb{R}) \simeq \text{PSO}_{d,1}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}(\text{M}_{d+1}(\mathbb{R}))$. Soient $p, q \in \partial \mathbb{H}^d$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- $(g_n)_n$ converge simplement vers $\delta_{p,q}$ sur $\partial \mathbb{H}^d \setminus \{q\}$.
- $(g_n)_n$ converge simplement vers $\delta_{p,q}$ sur $\overline{\mathbb{H}^d} \setminus \{q\}$.
- $(g_n)_n$ converge uniformément sur les compacts de $\overline{\mathbb{H}^d} \setminus \{q\}$ vers $\delta_{q,p}$.
- Pour tout ouvert $\mathcal{U}_p \ni p$, $\mathcal{U}_q \ni q$, il existe un N tel que pour tout $n \geq N$, on a:

$$g_n(\partial \mathbb{H}^d \setminus \mathcal{U}_q) \subset \mathcal{U}_p$$

- Dans $\mathbb{P}(\text{M}_{d+1}(\mathbb{R}))$, la suite g_n converge vers une application quasi-projective qui représente $\delta_{p,q}$.

Théorème VIII.7. — L'action de G sur $\overline{\mathbb{H}^d}$ est une action de convergence.

Proof. — Soit $(g_n)_n \rightarrow \infty$. La décomposition KAK , nous permet d'écrire $g_n = k_n a_n m_n$ avec $k_n, m_n \in K$ et $a_n \in A$. Quitte à extraire, on peut supposer que $k_n \rightarrow k_\infty$ et $m_n \rightarrow m_\infty$. Comme $g_n \rightarrow \infty$, il vient que $a_n \rightarrow \infty$. Mais $A \simeq \mathbb{R}_+^*$, écrire les matrices... Il vient que (quitte à extraire), $a_n \rightarrow \delta_{p,q}$, par suite $g_n \rightarrow k_\infty \circ \delta_{p,q} \circ m_\infty = \delta_{k_\infty(p), m_\infty^{-1}(q)}$. \square

6. L'ensemble limite II

6a. Les lemmes. —

Lemme VIII.8 (Accu implique dans l'ensemble limite). —

Si $(g_n)_n \rightarrow \delta_{p,q}$ alors $p, q \in \Lambda_\Gamma$.

Proof. — On a $g_n \cdot x \rightarrow p$ pour tout $x \in \mathbb{H}^d \dots$ et $(g_n^{-1})_n \rightarrow \delta_{q,p}$. \square

Lemme VIII.9 (La réciproque). — Si $\gamma_n x \rightarrow p \in \partial \mathbb{H}$ alors tout point d'accumulation de $(g_n)_n$ est un $\delta_{p,q}$ pour un certain $q \in \Lambda_\Gamma$.

Proof. — Soit $\delta_{r,q}$ un point d'accumulation de la suite $(g_n)_n$ montrons que $r = p$, par l'absurde. Si $r \neq p$, soit $\mathcal{U}_r, \mathcal{U}_q, \mathcal{U}_p$ des ouverts disjoints autour de r, q, p tel que $x \notin \mathcal{U}_q$, il existe alors un N tel que $g_n \cdot x \in \mathcal{U}_r$ et $g_n x \in \mathcal{U}_p$. Absurde.

Il nous reste à vérifier que $q \in \Lambda_\Gamma$, c'est une conséquence du lemme précédent. \square

Lemme VIII.10. — [Convergence vers deux points distincts implique hyperbolique]

Si $(g_n)_n \rightarrow \delta_{p,q}$ avec $p \neq q$ alors pour n assez grand g_n est hyperbolique et $g_n^+ \rightarrow p$ et $g_n^- \rightarrow q$.

Lemme VIII.11. — Tout élément elliptique préserve une distance sur $\partial \mathbb{H}^d$.

Tout élément parabolique préserve une distance sur $\partial \mathbb{H} \setminus \{g^+\}$.

Proof. — C'est clair. \square

Exercice. —

Si les g_n sont hyperboliques et $(g_n)_n \rightarrow \delta_{p,q}$ avec $p \neq q$ alors $g_n^+ \rightarrow p$ et $g_n^- \rightarrow q$.

Proof. — Supposons qu'il existe une infinité de n tel que g_n est elliptique. On les note g_{n_k} . On considère \mathcal{U}_p et \mathcal{U}_q des petits ouverts autour de p et q . Si k est assez grand alors $g_{n_k}(\mathcal{U}_q^c) \subset \mathcal{U}_p$. Si on note d_δ une distance invariante par g_{n_k} pour n_k assez grand. Alors, on obtient que:

$$\text{diam}(\mathcal{U}_q^c) = \text{diam}(g_{n_k}(\mathcal{U}_q^c)) \leq \text{diam}(\mathcal{U}_p) < \text{diam}(\mathcal{U}_q^c).$$

Supposons qu'il existe une infinité de n tel que g_n est parabolique. On les note g_{n_k} . On considère \mathcal{U}_p et \mathcal{U}_q des petits ouverts autour de p et q . Si k est assez grand alors $g_{n_k}(\mathcal{U}_q^c) \subset \mathcal{U}_p$. On choisit un k très grand, on note r le point fixe de g_{n_k} . On note d_{euc} la distance euclidienne invariante sur $\partial\mathbb{H}^d \setminus \{r\}$ par les paraboliques fixant r .

Quitte à augmenter un peu \mathcal{U}_q , on a deux cas: $r \in \mathcal{U}_q$ et $r \in \mathring{\mathcal{U}}_q^c$. Dans le cas 2, comme $g_{n_k}(\mathcal{U}_q^c) \subset \mathcal{U}_p$, pour d_{euc} on a envoyé un voisinage de l'infini sur un borné, c'est absurde.

Si $r \in \mathcal{U}_q$ alors pour d_{euc} on a une isométrie qui contracte \mathcal{U}_q^c sur $\mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_q^c$, c'est absurde.

Les g_n sont donc hyperboliques si n est assez grand. Il reste à montrer que $g_n^+ \rightarrow p$ et $g_n^- \rightarrow q$. On commence par remarquer que la distance de translation des $(g_n)_n$ tend vers l'infini, sinon les $(g_n)_n$ serait inclus dans un compact de G . On raisonne par l'absurde, en montrant que le seul point d'accumulation possible de la suite $(g_n^+)_n$ est p . En effet, supposons que $g_{n_k}^+ \rightarrow r \neq p$. Alors, on obtient que $g_{n_k} \rightarrow \delta_{r,\bullet}$. \square

6b. Structure de l'ensemble limite. —

Corollary 6.1 (Un point - Un élément). — Si Γ est non-élémentaire alors quelque soit $p \in \Lambda_\Gamma$ il existe $g_n \in \Gamma$ hyperbolique tel que $g_n^+ \rightarrow p$.

Proof. — Le lemme VIII.10 montre qu'il existe $g_n \rightarrow \delta_{p,q}$ pour un certain $q \in \Lambda_\Gamma$. Soit $k \in \Gamma$, alors la suite $(g_n k)_n \rightarrow \delta_{p,k^{-1}q}$, or le groupe Γ est non-élémentaire donc il ne fixe pas le point q donc on peut trouver k tel que $(g_n k)_n \rightarrow \delta_{p,r}$ avec $r \neq p$, le lemme précédent montre que les $(g_n k)$ sont hyperboliques si n est assez grand et $(g_n k)^+ \rightarrow p$. \square

Corollary 6.2. — Si Γ est non-élémentaire alors l'ensemble limite est l'adhérence des points fixes attractifs des éléments hyperboliques de Γ .

Proof. — C'est un corollaire trivial. \square

Théorème VIII.12 (Deux points - Un élément). — Soit Γ non-élémentaire. Soient $p \neq q \in \Lambda_\Gamma$, il existe $\gamma_n \in \Gamma$ hyperbolique tel que $p_{\gamma_n}^+ \rightarrow p$ et $p_{\gamma_n}^- \rightarrow q$.

Proof. — Ils existent $r, s \in \Lambda_\Gamma$ tel que $\delta_{p,r}, \delta_{s,q}$ sont des points d'accumulations de Γ . On peut supposer que p, q, r, s sont tous distincts, puisque les Γ -orbites de r, s sont infinies, puisque Γ est non-élémentaire. Soient $(g_n)_n$ et $(h_n)_n$ suites de Γ tel que: $(g_n)_n \rightarrow \delta_{p,r}$ et $(h_n)_n \rightarrow \delta_{s,q}$. Quitte à extraire on peut supposer que $(g_n h_n)_n$ converge aussi. Pour tout ouvert \mathcal{U}_\bullet autour de $\bullet = p, q, r, s$, que l'on suppose suffisamment petit pour être disjoint, pour n assez grand, on a:

$$g_n(\partial\mathbb{H}^d \setminus \mathcal{U}_r) \subset \mathcal{U}_p \quad h_n(\partial\mathbb{H}^d \setminus \mathcal{U}_q) \subset \mathcal{U}_s$$

On a donc:

$$g_n h_n(\partial\mathbb{H}^d \setminus \mathcal{U}_q) \subset g_n(\mathcal{U}_s) \subset g_n(\partial\mathbb{H}^d \setminus \mathcal{U}_r) \subset \mathcal{U}_p$$

Par suite, $(g_n h_n)_n \rightarrow \delta_{p,q}$. De plus, $p \neq q$, donc $(g_n h_n)$ est hyperbolique pour n assez grand et on a ce qu'il faut. Cf lemme ci-dessous. \square

Corollary 6.3. — Si Γ est non-élémentaire alors l'ensemble limite est un compact parfait (i.e. sans point isolé).

Proof. — Soit $p \in \Lambda_\Gamma$, si $p = p_\gamma^+$ pour un $\gamma \in \Gamma$, alors $\gamma^n \cdot x \rightarrow p$ pour tout $x \neq p_\gamma^-$; si $p \neq p_\gamma^+$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ alors il existe γ_n tel que $\underbrace{p_{\gamma_n}^+}_{\neq p} \rightarrow p$ \square

Corollary 6.4 (Minimalité). —

- L'ensemble limite est le plus petit fermé Γ -invariant, i.e. ...
- Pour tout $p \in \partial\mathbb{H}^d$, l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite $\Gamma \cdot p$ est Λ_Γ .

Proof. — Tout fermé Γ -invariant contient les points fixes de ses éléments hyperboliques. Exo. \square

Proposition 6.5 (Sous-groupe). — Soit $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ non-élémentaires alors:

- $\Lambda_{\Gamma_1} \subset \Lambda_{\Gamma_2}$
- Si $\Gamma_1 \triangleleft \Gamma_2$ alors $\Lambda_{\Gamma_1} = \Lambda_{\Gamma_2}$.
- Si $\Gamma_1 \leq_{\text{fini}} \Gamma_2$ alors $\Lambda_{\Gamma_1} = \Lambda_{\Gamma_2}$.

Proof. — La première affirmation est triviale. Supposons $\Gamma_1 \triangleleft \Gamma_2$, on a déjà l'inclusion $\Lambda_{\Gamma_1} \subset \Lambda_{\Gamma_2}$. Si on montre que Λ_{Γ_1} est Γ_2 -invariant alors on aura l'autre inclusion puisque l'ensemble limite est le plus petit fermé invariant.

Soit $g \in G$, on a :

$$g(\Lambda_{\Gamma_1}) = \Lambda_{g\Gamma_1g^{-1}}$$

Donc si $g \in \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \triangleleft \Gamma_2$ alors on bien ce que l'on voulait. Pour la dernière, on se ramène à ce que l'on vient de faire, le groupe $\Gamma_0 = \bigcap_{\gamma \in \Gamma_2} g\Gamma_1g^{-1}$ est un sous-groupe distingué de Γ_2 qui contenu dans Γ_1 . Il faut juste vérifier que Γ_0 est non-élémentaire, pour cela on va montrer que Γ_0 est d'indice fini dans Γ_1 (1).

Le groupe Γ_2 agit sur les classes $g\Gamma_1$ par multiplication à gauche, on a donc un morphisme de Γ_2 vers le groupe fini $\mathfrak{S}(\Gamma_2/\Gamma_1)$. Le noyau de ce morphisme c'est Γ_0 ! \square

7. Le domaine de discontinuité

Definition 7.1. — Soit Γ non-élémentaire. Si $\Lambda_\Gamma = \partial\mathbb{H}^d$ alors on dit que Γ est de première espèce. Sinon, on dit que Γ est de seconde espèce.

Remarque. — On verra que si \mathbb{H}^d/Γ est compacte alors $\Lambda_\Gamma = \partial\mathbb{H}^d$, et si Γ est un groupe de Schottky alors Λ_Γ est un Cantor.

Definition 7.2. — Le domaine de discontinuité de Γ est l'ouvert $\Omega_\Gamma = \partial\mathbb{H}^d \setminus \Lambda_\Gamma$.

Proposition 7.3. — L'action $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^d \cup \Omega_\Gamma$ est proprement discontinue.

1. Si Γ contient un sous-groupe d'indice fini élémentaire alors Γ est élémentaire, parce qu'il a une orbite finie.

Exercice. — Montrer que $\mathbb{H}^d \cup \Omega_\Gamma$ est le plus grand ouvert de $\overline{\mathbb{H}^d}$ sur lequel Γ agit proprement discontinument.

Proof. — Soit K un compact de $\mathbb{H}^d \cup \Omega_\Gamma$, i.e un fermé K de $\overline{\mathbb{H}}$ tel que $K \cap \Lambda_\Gamma = \emptyset$. Soit $E = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$. On veut montrer que E est fini. Supposons que E est infini. Il existe alors $(\gamma_n)_n$ une suite d'isométries 2 à 2 distinctes et qui converge vers un $\delta_{p,q}$ avec $p, q \in \Lambda_\Gamma$. En particulier, pour tout ouvert $\mathcal{U} \ni p$, pour n assez grand, on a $\gamma_n(K) \subset \mathcal{U}$. Mais, si \mathcal{U} est suffisamment petit alors $K \cap \mathcal{U} = \emptyset$, mais alors $\gamma_n \notin E$ absurde. \square

8. Domaine fondamental de Dirichlet

Théorème VIII.13 (Dirichlet). — Soit Γ un sous-groupe discret du groupe des isométries de l'espace hyperbolique \mathbb{H} de dimension d . Il existe un domaine fondamental convexe localement fini pour l'action du groupe Γ sur \mathbb{H} .

On dit qu'un fermé D de \mathbb{H} est un *domaine fondamental* pour l'action de Γ sur \mathbb{H} lorsque:

- $\bigcup_\gamma \gamma(D) = \mathbb{H}$.
- $\forall \gamma \in \Gamma, \quad \gamma(\overset{\circ}{D}) \cap \overset{\circ}{D} \neq \emptyset \Rightarrow \gamma = 1$, où $\overset{\circ}{D}$ est l'intérieur de D .

On rappelle qu'un sous-ensemble $D \subset \mathbb{H}$ est *convexe*, lorsque pour tout $x, y \in D$, le segment $[x, y]$ est inclus dans D . Enfin, un domaine fondamental D est *localement fini* lorsque: Pour tout compact de \mathbb{H} , l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(D) \cap K\}$ est fini.

9. Quelques conséquences

Definition 9.1. — Il existe une fonction $\rho : \mathbb{H}^d \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positive telle que la mesure sur \mathbb{H}^d définie via la formule $\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{H}^d} \rho(x) 1_{\mathcal{A}}(x) dLeb(x)$ est G -invariante. On obtient ainsi une mesure invariante par G sur \mathbb{H}^d , mieux on dit qu'on a un volume invariant parce que ρ est lisse.

Remarque. — Dans le cas de \mathbb{H}^2 (modèle du disque conforme), $\rho(z) = \frac{4}{(1-|z|^2)^2}$.

Corollary 9.2. — Le nombre $\mu(D)$ ne dépend que de Γ . On peut donc définir la notion de réseaux.

Proof. — C'est un simple calcul basé sur le fait que si D est un domaine fondamental localement fini alors:

$$\mathbb{H}^d = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(D) \quad \text{Vol}(D \cap \gamma(D)) = 0$$

On y va:

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(D) &= \text{Vol}(D \cap \mathbb{H}^d) \\
 &= \text{Vol}(D \cap \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(D')) \\
 &= \text{Vol}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} D \cap \gamma(D')) \\
 &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{Vol}(D \cap \gamma(D')) \quad \text{car} \quad \text{Vol}(D' \cap \gamma(D')) = 0 \\
 &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{Vol}(\gamma^{-1}D \cap D') \\
 &= \text{Vol}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1}D \cap D') \\
 &= \text{Vol}(\mathbb{H}^d \cap D') \\
 &= \text{Vol}(D')
 \end{aligned}$$

□

.....Fin du Cours 09

Remarque. — Il y a une distance sur \mathbb{H}^d/Γ défini par $d(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(x, \gamma \cdot y)$, c'est la distance induite sur le quotient. Le point délicat ⁽²⁾ c'est la séparation et c'est une conséquence du fait que l'action est proprement discontinue.

Exercice. — Montrer que l'application de passage au quotient est une isométrie locale, sous l'hypothèse supplémentaire que Γ est sans torsion.

Théorème VIII.14. — Soit $\Gamma \leq \text{Isom}^+(\mathbb{H}^d)$ un réseau. Alors tout domaine de Dirichlet est un polytope (fini) ⁽³⁾.

Proof. — La preuve uniquement dans le cas uniforme. On note R le diamètre de \mathbb{H}^d/Γ . On fixe un point $o \in \mathbb{H}^d$, on obtient que:

$$\forall x \in \mathbb{H}^d, \quad \exists \gamma \in \Gamma, \quad d(\gamma \cdot x, o) \leq R$$

En particulier, $D = D(o, \Gamma)$ est inclus dans la boule de centre o et de rayon R , puisque $y \in D$ si et seulement si y est le point de $\Gamma \cdot y$ le plus proche de o . Par suite, D est borné. Hors, D est localement finie donc D est un polytope avec un nombre fini de côtés. □

Exercice (Rappel). — Soit Γ discret et D un domaine fondamental. On considère $F = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(D) \cap D \neq \emptyset\}$. Montrer que F est une partie génératrice de Γ .

Corollary 9.3. — Soit Γ est un réseau alors Γ est de type fini. Mieux, en fait Γ est de présentation finie.

Théorème VIII.15. — Soit $\Gamma \leq \text{Isom}^+(\mathbb{H}^d)$ un réseau. Alors Γ est de première espèce.

2. La démo de l'IT est purement formelle.

3. i.e l'enveloppe convexe intersecté avec \mathbb{H}^d d'un nombre fini de points de $\overline{\mathbb{H}^d}$.

Proof. — Sous l'hypothèse plus forte de réseau uniforme. Soit $p \in \partial\mathbb{H}^d$. Soit $\mathcal{U} \ni p$ un ouvert de $\mathbb{R}\mathbb{P}^d$. Pour tout $R > 0$, il existe $x \in \mathcal{U} \cap \mathbb{H}^d$ tel que $B_x(R) \subset \mathcal{U}$.

Mais, si $R > \text{Diam}(\mathbb{H}^d/\Gamma)$ alors: pour tout $o \in \mathbb{H}^d$, $\forall y \in \mathbb{H}^d, \exists \gamma \in \Gamma, d(y, \gamma \cdot o) \leq R$.

En particulier, pour tout $o \in \mathbb{H}^d$, on a $\Gamma \cdot o \cap B_x(R) \neq \emptyset$. Donc, $\Gamma \cdot o \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, ainsi $p \in \Lambda_\Gamma$. \square

CHAPTER IX

GROUPES KLEINÉENS: DES EXEMPLES

Contents

1. Schottky dans le plan hyperbolique	69
1a. Deux lemmes	69
1b. Le graphe de Cayley de F_2	70
1c. La construction de Schottky	70
1d. Généralisation	71
2. Réseaux arithmétiques	71
2a. Réseaux de \mathbb{R}^d	71
2b. Le théorème de Mahler	72
2c. Réseaux: exemples	73
2d. Exemple 1	73
2e. Exemple 2	74
2f. Exemple 3	75
2g. Exemple 4	75
2h. Exemple 5	75
2i. Théorèmes autour des réseaux	75
3. Groupe de Coxeter	76
3a. Une version lisse de Poincaré	76

1. Schottky dans le plan hyperbolique

1a. Deux lemmes. —

Lemme IX.1. — Si l_1, l_2 sont deux géodesiques du plan hyperbolique dont les 4 extrémités sont distinctes alors il existe une unique perpendiculaire commune.

Lemme IX.2. — Soit $G \curvearrowright X$. Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ des éléments de G d'ordre infini. On suppose qu'ils existent $X_1^+, X_1^-, \dots, X_r^-, X_r^+$ des parties d'adhérence 2 à 2 disjointes de X , tel que:

$$\forall i, \forall j \neq i, \gamma_i(Z \setminus X_i^-) \subset \overline{X_i^+} \quad \text{and} \quad \gamma_i^{-1}(Z \setminus X_i^+) \subset \overline{X_i^-}$$

alors le morphisme du produit libre des γ_i vers le groupe engendré par les γ_i est un isomorphisme.

Proof. — On fait la démo dans le cas $r = 2$, pour simplifier les notations. Soit w un mot réduit sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ ⁽¹⁾, on a 16 possibilités:

1. Le mot commence par un a, b, a^{-1}, b^{-1} , et le mot finit par a, b, a^{-1}, b^{-1}

Par récurrence, on montre que $w = \alpha^k u \beta^l (Z \setminus X_\beta^{-\text{sign}(l)}) \subset \overline{X_\alpha^{\text{sign}(k)}}$. En particulier, si $\alpha = \beta = a$ et k est de signe différent de l (p.ex > 0) alors $w \neq Id$ puis-qu'alors on a:

$$w = a^k u a^{-k'} (Z \setminus X_{a^+}) \subset \overline{X_a^+}$$

Or, quitte à conjuguer par une puissance suffisamment grande de a tout élément est de la forme $a^k u a^{-l}$. \square

1b. Le graphe de Cayley de F_2 . — Le graphe de Cayley d'un groupe Γ engendré par un ensemble fini S qui vérifie $S = S^{-1}$, $e \notin S$ est le graphe $\mathcal{G} = \text{Cay}(\Gamma, S)$ suivant: les sommets de \mathcal{G} sont les éléments de Γ , et deux sommets γ et δ sont reliés par une arête lorsque $\gamma = \delta s$ pour un certain $s \in S$.

Faire l'exemple du groupe libre à deux générateurs

L'action par translation à gauche sur Γ respecte les arêtes du graphe, on a donc aussi une action sur le graphe. Attention, l'action par translation à droite ne respecte pas les arêtes du graphe. L'action sur le graphe est par isométrie pour la distance canonique sur le graphe. La distance entre γ et δ est le nombre minimal n de générateurs s_1, \dots, s_n nécessaire pour avoir $\gamma = \delta s_1 \dots s_n$.

Exercice. — Montrer par récurrence que l'ensemble des mots de longueur N dans $F(a, b)$ est de cardinal $4 \cdot 3^{N-1}$.

1c. La construction de Schottky. — Pour construire un groupe de Schottky, on commence par construire le domaine fondamental, puis les axes des futurs générateurs, puis les générateurs et enfin le groupe. On explique la dynamique des domaines fondamentaux. En particulier la philosophie du $\gamma_h(\partial\mathbb{H}^2 \setminus Y_h^-) = \overline{Y_h^+}$.

Lemme IX.3. — Le groupe $\langle \gamma_h, \gamma_v \rangle$ est libre de rang 2.

Proof. — Application directe. \square

Lemme IX.4. — Dans la situation Schottky, le domaine D est un domaine fondamental de Dirichlet centré au centre pour l'action de Γ sur \mathbb{H}^2 .

Proof. — Par construction, il est clair $\gamma(D) \cap D$ d'intérieur non vide implique que $\gamma = e$ puisque γ_h et γ_v jouent au ping-pong.

Montrer par récurrence que:

- X_N l'orbite de D sous l'action des éléments de longueur inférieure ou égale à N est la composante connexe de \mathbb{H}^2 (contenant o) privé des médiatrices o et $w \cdot o$ pour w de longueur exactement N .
- X_N est pavé.
- le dual du pavage est la boule de rayon N du graphe de Cayley de $F(a, b)$ pour le système de générateur $\{a, b\}$.
- $X_N \subset X_{N+1}$.

1. C'est-à-dire une suite finie w de longueur l à valeurs dans \mathcal{A} telle que $w_i \neq w_{i+1}^{-1}$

On en déduit donc que X_∞ est un ouvert convexe. Montrons à présent par l'absurde que $X_\infty = \mathbb{H}^2$. Supposons qu'il existe un $x \notin X_\infty$. On considère la géodésique $s = [o, x]$. On note T le temps tel que $s(t) \in X_\infty$ si $t < T$ et $s(t) \notin X_\infty$ si $t > T$. On a deux cas à distinguer, $s(T) \in X_\infty$ et $s(T) \notin X_\infty$.

Le premier cas est impossible puisque X_∞ est ouvert. Dans le second cas, on note $(y_n)_n$ les points de rencontres entre s et les murs de X_∞ . La distance entre deux murs est minorée par une constante strictement positive, donc la suite $(y_n)_n$ est finie, c'est absurde puisqu'elle converge vers x . \square

1d. Généralisation. —

Théorème IX.5. — Soient D_i^+ et D_i^- n disques ouverts d'adhérence disjointes de $\partial\mathbb{H}^d$. Soient $\gamma_i \in G$ tel que $\gamma_i(\partial\mathbb{H}^d \setminus D_i^-) = \overline{D_i^+}$. Le groupe Γ engendré par les γ_i est un groupe libre de base les γ_i , l'enveloppe convexe du complémentaire des disques est un domaine fondamental, l'ensemble limite est un Cantor. Un tel groupe s'appelle un groupe de Schottky.

Corollary 1.1 (Exo). — Tout sous-groupe non-élémentaire de G contient un groupe libre.

Remarque (Indication). — Mieux, pour toute paire d'éléments hyperboliques avec des points fixes disjoints, le groupe engendré par une puissance suffisamment grande des générateurs est libre.

2. Réseaux arithmétiques

2a. Réseaux de \mathbb{R}^d . —

Definition 2.1. — Soit Λ un sous-groupe de \mathbb{R}^d alors LASSE:

- Λ un sous-groupe discret de \mathbb{R}^d et \mathbb{R}^d/Λ est compact.
- Λ un sous-groupe discret de \mathbb{R}^d et $\text{Span}_{\mathbb{R}}(\Lambda) = \mathbb{R}^d$.
- Il existe $(v_1, \dots, v_d) \in \Lambda$ tel que:
 - $\text{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_d) = \mathbb{R}^d$.
 - $\text{Span}_{\mathbb{Z}}(v_1, \dots, v_d) = \Lambda$.
 - (v_1, \dots, v_d) est une famille libre.

Definition 2.2. — Le *volume* de Λ est le déterminant de n'importe quelle base de Λ , c'est (donc) aussi le volume d'un parallélogramme fondamental. La *systole* de Λ est la longueur du plus petit vecteur non nul de Λ , on la note $L(\Lambda)$.

Remarque. — On aurait aimé que pour tout réseau il existe une base formé par les d plus petits vecteurs mais c'est faux comme le montre l'exemple suivant: Prendre Λ le groupe engendré par \mathbb{Z}^d et le vecteur $v = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, c'est bien un réseau puisque $\mathbb{Z}^d \subset \Lambda \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$. On a d vecteurs de norme 1 dans Λ mais le vecteur v est de norme $\sqrt{\frac{n}{4}} > 1$ dès que $n > 4$.

Remarque. — On va avoir besoin de quotienter... Si (v_1, \dots, v_d) est une \mathbb{Z} -base de Λ alors:

- $\Lambda/\mathbb{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_r$ est un réseau de $\mathbb{R}^d/\mathbb{R}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}v_r$ (2).

2. par exemple parce que (v_{r+1}, \dots, v_d) vérifie la 3ème assertion de la définition de réseau.

- Le groupe $\pi_k(\Lambda)$ est un réseau de W_k^\perp , où $W_k = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ et π_k est la projection orthogonal sur W_k^\perp .

On remarque au passage que \mathbb{R}^d induit une norme sur $\mathbb{R}^d / \mathbb{R}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}v_r$.

Théorème IX.6. — *Pour tout réseau, il existe une base (v_1, \dots, v_d) tel que:*

- $L(\Lambda) = |v_1|$
- $L(\pi_k(\Lambda)) = |\pi_k(v_{k+1})|$
- Et, le vecteur v_{k+1} est le vecteur de \mathbb{R}^d de norme minimal parmi les vecteurs de $v_{k+1} + \mathbb{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_k$.

une telle base est une base admissible de Λ .

Proof. — C'est simplement, soit v_1 qui réalise la systole, puis soit v_2 qui a réalise la systole du quotient... Pour avoir le 3ème point, on choisit dans $v_{k+1} + \mathbb{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_k$ le vecteur de longueur minimale, ce qui est possible puisque c'est un ensemble discret. \square

.....Fin du Cours 10

On note \mathcal{L}_d l'espace des réseaux de \mathbb{R}^d de volume 1. Le groupe $SL_d(\mathbb{R})$ agit transitivement sur \mathcal{L}_d , et le stabilisateur du réseau canonique est $SL_d(\mathbb{Z})$, par conséquent \mathcal{L}_d s'identifie à $SL_d(\mathbb{R})/SL_d(\mathbb{Z})$.

2b. Le théorème de Mahler. —

Théorème IX.7. — *Pour $r > 0$, l'ensemble F_r des réseaux ayant une systole supérieure ou égale à r est compact.*

Remarque. — L'application systole est continue car $\Lambda \cap B(0, 2L(\Lambda))$ est finie.

Proof. — On montre que pour tout $r > 0$, il existe $R = R(d, r)$ tel que pour toute base admissible de tout réseau Λ de F_r , on a $r \leq v_i \leq R$. Ceci conclut la preuve, puis-qu'alors toute suite de bases admissibles sous-converge et la limite est encore une base puisque le déterminant de ces bases est constant égale à 1.

Si $n = 1$ alors $\mathcal{L}_1 = \{\bullet\}$ et tout est clair. Si $n = 2$. Soit (v_1, v_2) un base admissible de Λ .

La boule $B(0, \frac{|v_1|}{2})$ s'injecte dans le quotient \mathbb{R}^d/Λ , puisque si $\pi(x) = \pi(y)$ alors $x - y \in \Lambda$ et $|x - y| \leq |x| + |y| < |v_1|$ donc $x = y$, puisque v_1 est réalise la systole.

Par suite:

$$\frac{\pi}{4}|v_1|^2 = \text{Volume de la boule euclidienne de rayon } \frac{|v_1|}{2} \leq \text{Volume de } \mathbb{R}^d/\Lambda = 1$$

Il existe donc $R_1 = R_1(\varnothing)$ tel que $|v_1| \leq R_1$. Montrons à présent qu'il existe un $R_2 = R_2(r)$ tel que $v_2 \leq R_2$. On a :

$$\begin{aligned} |v_2 - v_1|^2 &= |v_2|^2 + |v_1|^2 - 2|v_1||v_2|\cos(\theta) \\ &\geq |v_2|^2 \quad \text{car } (v_1, v_2) \text{ est une base admissible} \end{aligned}$$

Donc

$$|v_1|^2 \geq 2|v_1||v_2|\cos(\theta)$$

Donc

$$\cos(\theta) \leq \frac{|v_1|}{2|v_2|} \leq \frac{1}{2}$$

Donc

$$|\theta| \geq \frac{\pi}{3}$$

Supposons qu'il existe une suite de réseaux Λ_n et une suite de bases admissibles tel que $v_2^n \rightarrow \infty$ alors on a :

$$r \leq |v_1| \leq R_1 \quad |\theta| \geq \frac{\pi}{3}$$

Par suite, le volume de Λ_n tend vers l'infini. Ce qui est absurde donc R_2 existe. Si $n \geq 3$, on a de la même façon que $\theta(v_1, v_3), \theta(v_3, v_2), \theta(v_3, v_1) \geq \frac{\pi}{3}$ et on obtient une borne pour v_2, v_3 , et ainsi de suite... \square

2c. Réseaux: exemples. —

2d. Exemple 1. — On considère la forme quadratique $q(x, y) = x^2 - Dy^2$ sur \mathbb{R}^2 , où D est un entier naturel sans facteur carré, ainsi $0 \notin q(\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\})$. On pose :

$$G = \text{SO}(q, \mathbb{R}) = \{ \gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{R}) \mid \gamma \cdot q = q \} \simeq \text{SO}_{1,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$$

et

$$\Gamma = \text{SO}(q, \mathbb{Z}) = \{ \gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma \cdot q = q \}$$

Théorème IX.8. — *Le groupe Γ est un réseau uniforme de G .*

Remarque. — On considère l'action de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ sur lui-même par multiplication à gauche, autrement dit $(u + \sqrt{D}v) \cdot (x + \sqrt{D}y) = ux + Dvy + \sqrt{D}(xv + uy)$. Le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ est \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension 2, et cette action est linéaire⁽³⁾, autrement dit on a un morphisme $\mathcal{M} = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{D})^* \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Q}) \right)$, qui est explicite $u + v\sqrt{D} \mapsto \begin{pmatrix} u & Dv \\ v & u \end{pmatrix}$, dans la \mathbb{Q} -base $(1, 0)$ et $(0, \sqrt{D})$.

On a une forme quadratique sur l'espace vectoriel $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ qui est $z = x + y\sqrt{D} \mapsto x^2 - Db^2 = \det(\mathcal{M}_{x+y\sqrt{D}}) = z\sigma(z) = \text{Norme}(z) = N(z)$, où σ est l'unique automorphisme non-trivial de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. En particulier, si on note $A = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ alors

$$A^* \underset{\text{exo}}{=} \{ z \in A \mid N(z) = \pm 1 \} = \mathcal{M}^{-1}(\text{SL}_2^\pm(\mathbb{Z}))$$

Maintenant, on revient au réel. Le groupe $\mathbb{Q}(\sqrt{D})^*$ agit encore par multiplication sur \mathbb{R}^2 via \mathcal{M} en voyant $\mathcal{M} = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{D})^* \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R}) \right)$.

3. C'est la distributivité.

Ainsi, le groupe A^* préserve la forme quadratique $x^2 - Dy^2$ et est inclus dans $\mathrm{SL}_{\pm 2}(\mathbb{R})$. Autrement dit: $A^* = \Gamma$! Et, le théorème des unités de Dirichlet nous dit que A^* est virtuellement cyclique.

2e. Exemple 2. — On considère la forme quadratique $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - Dz^2$, où D est un entier naturel tel que $0 \notin q(\mathbb{Z}^3 \setminus \{0\})$, par exemple $D \equiv 3 \pmod{4}$. On pose:

$$G = \mathrm{SO}(q, \mathbb{R}) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) \mid \gamma \cdot q = q\} \simeq \mathrm{SO}_{2,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$$

et

$$\Gamma = \mathrm{SO}(q, \mathbb{Z}) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \mid \gamma \cdot q = q\}$$

Théorème IX.9. — *Le groupe Γ est un réseau uniforme de G .*

Proof. — On note $X = \mathrm{SO}(q, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(q, \mathbb{Z}) = G / G \cap \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) / \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ via l'application $\varphi : X \rightarrow \mathcal{L}_3$. L'application φ étant clairement injective.

$$\text{On a: Pour tout } \Lambda = \underbrace{g \cdot \mathbb{Z}^3}_{\in \mathrm{SO}(q, \mathbb{R})} \in X, \forall u = \underbrace{A}_{\in \mathrm{SO}(q, \mathbb{R})} \cdot \underbrace{x}_{\in \mathbb{Z}^3} \in \Lambda \setminus \{0\}, \quad q(u) = q(Ax) = q(x) \in \mathbb{Z},$$

donc $q(u) \geq 1$. **Faire un dessin.** Il existe donc un $r > 0$ tel que pour tout $\Lambda \in X$, $L(\Lambda) \geq r$. L'ensemble X est donc précompact. Reste à montrer que X est fermé.

Soit $\Lambda_n \in X$ une suite de réseaux convergeant vers un réseau Λ_∞ . On peut écrire $\Lambda_n =$ le réseau engendré par les vecteurs $A_n B_n$ où $A_n \in \mathrm{SO}(q, \mathbb{R})$, et $B_n \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ et la matrice $A_n B_n$ converge vers une matrice C_∞ . Il suffit de montrer qu'il existe $A_\infty \in \mathrm{SO}(q, \mathbb{R})$ et $B_\infty \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ tel que $A_n \rightarrow A_\infty$ et $B_n \rightarrow B_\infty$. Autrement dit, on veut montrer que $\mathrm{SO}(q, \mathbb{R}) \cdot \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ est fermé dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.

Remarque. — L'ensemble E des formes quadratiques sur \mathbb{R}^3 est un espace vectoriel de dimension finie, c'est l'ensemble des matrices symétriques. En particulier, une forme quadratique est déterminée par sa valeur en un nombre fini de points. Donc, le sous-ensemble des formes quadratiques q tel que $q(\mathbb{Z}^3) \subset \mathbb{Z}^3$ est un sous-ensemble discret.

On pose $q_n = q(A_n B_n \cdot)$, on remarque deux choses:

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a : $q_n(x) \rightarrow q(Cx)$, donc $(q_n)_n$ converge.
- Pour tout n , $q_n(\mathbb{Z}^3) = q(A_n B_n \mathbb{Z}^3) = q(A_n \mathbb{Z}^3) = q(\mathbb{Z}^3) \subset \mathbb{Z}^3$, donc $(q_n)_n$ appartient à un sous-ensemble discret.

Il vient que $(q_n)_n$ stationne, autrement dit, il existe un $N > 0$ tel que pour tout $i, j \geq N$, on a: Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} q(A_i B_i x) &= q(A_j B_j x) \\ q(B_i x) &= q(B_j x) \\ {}^t(B_i x) q(B_i x) &= {}^t(B_j x) q(B_j x) \\ {}^t B_i q B_i &= {}^t B_j q B_j \\ {}^t(B_i B_j^{-1}) q(B_i B_j^{-1}) &= q \end{aligned}$$

On a obtenu que $B_i B_j^{-1} \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \cap \mathrm{SO}(q, \mathbb{R}) = \mathrm{SO}(q, \mathbb{Z})$, par suite quitte à changer A_n en $A_n B_n B_N^{-1}$ et B_n en B_N , on peut supposer B_n est constante pour $n \geq N$, on obtient donc A_n converge, il vient que X est fermé. \square

2f. Exemple 3. — On considère la forme quadratique $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - Dt^2$, où D est un entier naturel tel que $0 \notin q(\mathbb{Z}^4 \setminus \{0\})$. On pose:

$$G = \mathrm{SO}(q, \mathbb{R}) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{R}) \mid g \cdot q = q\} \simeq \mathrm{SO}_{3,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

et

$$\Gamma = \mathrm{SO}(q, \mathbb{Z}) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{Z}) \mid g \cdot q = q\}$$

Théorème IX.10. — Le groupe Γ est un réseau uniforme de G .

Théorème IX.11 (Théorème de Meyer). — Soit $q(x_0, \dots, x_d)$ une forme quadratique à coefficients dans \mathbb{Z} de \mathbb{R}^{d+1} avec $d \geq 4$ alors $0 \in q(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

2g. Exemple 4. — On considère la forme quadratique $q(x, y, z) = x_1^2 + x_2^2 + x_d^2 - x_0^2$ ⁽⁴⁾. On pose:

$$G = \mathrm{SO}(q, \mathbb{R}) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R}) \mid g \cdot q = q\} \simeq \mathrm{SO}_{d,1}(\mathbb{R})$$

et

$$\Gamma = \mathrm{SO}(q, \mathbb{Z}) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{Z}) \mid g \cdot q = q\}$$

Théorème IX.12. — Le groupe Γ est un réseau **non-uniforme** de G .

2h. Exemple 5. — On considère la forme quadratique $q(x, y, z) = x_1^2 + x_2^2 + x_d^2 - \sqrt{D}x_0^2$, où D n'est pas un carré. On pose:

$$G = \mathrm{SO}(q, \mathbb{R}) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{R}) \mid g \cdot q = q\} \simeq \mathrm{SO}_{d,1}(\mathbb{R})$$

et

$$\Gamma = \mathrm{SO}(q, \mathbb{Z}[\sqrt{D}]) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_{d+1}(\mathbb{Z}[\sqrt{D}]) \mid g \cdot q = q\}$$

Théorème IX.13. — Le groupe Γ est un réseau uniforme de G .

2i. Théorèmes autour des réseaux. —

Definition 2.3. — Un sous-groupe Γ de $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$ est un *réseau* de G lorsqu'il est discret et qu'il possède un domaine fondamental de volume fini. Plus généralement, un sous-groupe Γ d'un groupe de Lie (ou d'un groupe localement compact) est un réseau s'il est discret et de covolume fini pour une/toute mesure de Haar de G .

Théorème IX.14 (Borel & Harish-Chandra '60). — Tout groupe de Lie semi-simple admet des réseaux uniformes et non-uniformes.

Théorème IX.15 (Margulis '75, Corlette '90, & Gromov-Schoen '92)

Tout réseau d'un groupe de Lie semi-simple différent de $\mathrm{PO}_{d,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{PU}_{d,1}$ est arithmétique.

Théorème IX.16 (Vinberg '67, Gromov & Piatetski-Shapiro '87, Picard & Deligne & Mostow '86)

Le groupe de Lie $\mathrm{PO}_{d,1}(\mathbb{R})$ admet une infinité de réseaux non-arithmétiques pour tout $d \geq 2$.

Les groupes de Lie $\mathrm{PU}_{2,1}$ et $\mathrm{PU}_{3,1}$ admettent des réseaux non-arithmétiques. *On n'en connaît qu'un nombre fini...*

4. Donc en particulier qui représente zéro.

Remarque. — Pour $PU_{d,1}$ avec $d \geq 4$ on ne sait rien...

3. Groupe de Coxeter

Théorème IX.17 (Théorème de Poincaré). — Soit P un n -gone du plan hyperbolique avec des angles $\frac{\pi}{m_i}$ et soit Γ le groupe engendré par les réflexions par rapport aux côtés de P . Alors, le groupe Γ est discret et P est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur \mathbb{H}^2 .

Proof. — Oral d'Alexandre. □

3a. Une version lisse de Poincaré. —

Théorème IX.18. — Soit P le $4g$ -gone régulier d'angle $\frac{\pi}{2g}$ étiqueté comme sur le dessin. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ les uniques éléments hyperboliques tels que $\alpha_i(a_i) = \bar{a}_i$ et $\beta_i(b_i) = \bar{b}_i$ pour $i = 1, \dots, g$. Soit Γ le groupe engendré par ces éléments, le quotient \mathbb{H}^2/Γ est la surface de genre g et P est un domaine fondamental.

CHAPTER X

L'ESPACE DE TEICHMÜLLER

Contents

1. Surface hyperbolique versus structure hyperbolique	77
1a. C'est quoi une surface hyperbolique ?	77
1b. C'est quoi une structure hyperbolique ?	78
1c. Exemples d'homéo non-homotope à l'identité: les twists de Dehn	79
1d. Le π_1 en pratique	80
2. Le lemme de l'hexagone	80
3. Les pantalons	81
4. Décomposition d'une surface en pantalons	82
5. Une application de $T(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}^{3g-3}$	82
6. L'énoncé finale	82

L'objectif est de comprendre l'ensemble/espace des surfaces hyperboliques homéomorphe à la surface topologique de genre g modulo isométrie.

1. Surface hyperbolique versus structure hyperbolique

1a. C'est quoi une surface hyperbolique ?—

Definition 1.1. — Une surface hyperbolique (sans bord) *complète* est:

- la donnée S d'une surface topologique Σ (sans bord) munie d'un recouvrement $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ de Σ et des homéos sur leurs images $\varphi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{H}^2$ (appelés *cartes*) tels que pour tout i, j :
si on a $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ alors $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \rightarrow \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ est la restriction d'une isométrie de \mathbb{H}^2 , et enfin l'atlas $(\mathcal{U}_i)_i$ est maximal pour ces propriétés ⁽¹⁾, ET l'espace métrique $(\Sigma, d_{\text{induite}})$ est complet. On dit alors une $(\mathbb{H}^2, \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2))$ -surface complète.
- Un couple $S = (\Sigma, d)$ où S est une surface topologique et d une distance sur Σ telle que l'espace métrique (S, d) est complet et localement isométrique à \mathbb{H}^2 .
- Un couple $S = (\Sigma, m)$ où Σ est une surface différentielle et m une métrique Riemannienne complète sur Σ de courbure constante égale à -1 .
- Un couple (Σ, h) où Σ est une surface topologique et h un homéo $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe discret sans torsion de $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$.

Exemple. — Les quotients \mathbb{H}^2/Γ pour Γ un sous-groupe discret sans torsion de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

1. On dit aussi une $(\mathbb{H}^2, \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2))$ -surface.

Proposition 1.2 (Equivalence des deux premières définitions)

Toute isométrie entre deux ouverts du plan hyperbolique se prolonge en une isométrie du plan dans lui-même.

Remarque. — Si Σ est compacte alors Σ est complète.

Théorème X.1. — Soit S une surface hyperbolique complète (sans bord). Il existe un homéomorphisme local $D : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{H}^2$ et une représentation $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ tel que D est ρ -équivariante, i.e $D(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot x$. De plus, si (D', ρ') est une autre telle paire alors il existe $g \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ tel que $D' = g \circ D$ et $\rho' = g \rho g^{-1}$.

Proof. — Oral de Fanny. □

Definition 1.3. — Une géodésique d'une surface hyperbolique est une courbe qui lue dans les cartes est une géodésique de \mathbb{H}^2 . En particulier, une courbe c est une géodésique si et seulement si $D \circ \tilde{c}$ est une géodésique (non paramétrée).

Definition 1.4 (Surface hyperbolique à bord géodésique)

Une surface hyperbolique complète à bord géodésique est

1. Un couple $S = (\Sigma, d)$ où Σ est une surface topologique et d une distance sur Σ telle que l'espace métrique (Σ, d) est complet et localement isométrique à \mathbb{H}^2 ou demi- \mathbb{H}^2 .

Exemple. — Les surfaces hyperboliques. Un polygone sans ses sommets. Toute union de composantes connexes d'une surface hyperbolique moins un nombre fini de géodésiques fermées simples disjointes.

1b. C'est quoi une structure hyperbolique ?—

Definition 1.5. — Soit Σ une surface topologique (à bord ou non). Une structure hyperbolique sur Σ est un couple (S, φ) où:

- S est une surface hyperbolique (sans bord ou à bord géodésique) complète.
- $\varphi : \Sigma \rightarrow S$ est un homéo qui préserve l'orientation; appelé *un marquage*.

Definition 1.6. — Deux structures hyperboliques (S, φ) et (S', φ') sur Σ sont équivalentes lorsqu'il existe une isométrie $I : S \rightarrow S'$ telle que $I \circ \varphi : \Sigma \rightarrow S'$ et $\varphi' : \Sigma \rightarrow S'$ sont homotopes, autrement dit si et seulement si $\varphi'^{-1} \circ \varphi$ est homotope à une isométrie.

Definition 1.7. — L'espace de Teichmüller de Σ est l'ensemble des classes d'équivalence de structures hyperboliques sur Σ , muni de la topologie suivante : une base d'ouverts $(\mathcal{U}_\varepsilon)_\varepsilon$ autour de (S, φ) est donnée par l'ensemble des classes d'équivalence de structures hyperboliques (S', φ') sur Σ telles que $\varphi'^{-1} \circ \varphi$ est homotope à une application $(1 + \varepsilon)$ -Lipschitzienne entre $S \rightarrow S'$.

Remarque. — Si f est un homéo de Σ alors $f \cdot (S, \varphi) := (S, \varphi \circ f^{-1})$ définit une action du groupe des homéos de Σ sur l'espace de Teichmüller de Σ . Le noyau de cette action contient le groupe des homéos isotopes à l'identité. On obtient donc une action du groupe quotient $MCG(\Sigma) = \text{Homéo}(\Sigma)/\text{Homéo}(\Sigma)_0$, appelé le Mapping Class Group de Σ sur l'espace de Teichmüller. En fait, cette action est fidèle et proprement discontinue.

Deux homéos f, g sont *isotopes* s'ils existent une application continue $H : [0, 1] \rightarrow \text{Homéo}(\Sigma)$ tel que $H_0 = f$ et $H_1 = g$.

Remarque (Point de vue équivalent I). — On se donne Σ une surface différentielle. On définit $\text{HypMet}(\Sigma)$ l'espace des métriques à courbure constante égale à -1 complète sur Σ . Le quotient par l'action des difféos isotopes à l'identité est l'espace de Teichmüller et on a donc une action du mapping class group $\text{Diff}(\Sigma)/\text{Diff}(\Sigma)_0 = \text{MCG}(\Sigma) = \text{Homéo}(\Sigma)/\text{Homéo}(\Sigma)_0$.

Remarque (Point de vue équivalent II). — On se donne Σ une surface topologique. On considère l'espace T'_2 des couples (D, ρ) où D est un homéo $D : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{H}^2$ et ρ une représentation $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ tel que D est ρ -équivariante. On munit T'_2 de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts pour D et de topologie de la convergence simple pour ρ . Le groupe des homéo isotope à l'identité agit sur T'_2 via $f \cdot (D, \rho) = (D \circ f^{-1}, \rho)$ ⁽²⁾ et le groupe $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ agit aussi sur T'_2 via $g \cdot (D, \rho) = (g \circ D, g\rho g^{-1})$. L'espace de Teichmüller est le quotient de T'_2 par $\text{Homéo}^0(\Sigma) \times \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$, on retrouve une action du Mapping Class Group, modulo la différence entre homéo et difféo.

Remarque. — On pourrait considérer que l'espace vraiment intéressant c'est: l'espace des classes d'équivalence de surfaces hyperboliques homéomorphe à Σ modulo isométrie, on appelle cet espace : *l'espace des modules de Σ* , noté $\mathcal{M}(\Sigma)$.

- On a pas perdu $\mathcal{M}(\Sigma)$ en utilisant le marquage, $\mathcal{M}(\Sigma) = T(\Sigma)/\text{MCG}(\Sigma)$!
- La moral numéro 1, c'est que l'espace de Teichmüller est une étape intermédiaire pour comprendre $\mathcal{M}(\Sigma)$, puisque la topologie de $T(\Sigma)$ est beaucoup plus gentille que celle de $\mathcal{M}(\Sigma)$. Par exemple, $\mathcal{M}(\Sigma)$ n'est pas une variété, parce que l'action de $\text{MCG}(\Sigma)$ n'est pas libre.
- La moral numéro 2, c'est que l'espace de Teichmüller est plus intéressant $\mathcal{M}(\Sigma)$ puisqu'il fournit un espace "gentil, beau, etc..." sur lequel $\text{MCG}(\Sigma)$ agit de façon proprement discontinue.

Notations. — On note Σ pour les objets topologiques et S pour les objets géométriques.

1c. Exemples d'homéo non-homotope à l'identité: les twists de Dehn. —

Exemple (Un homéo du cylindre non homotope à l'identité)

On prend par exemple $TD : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times [0, 1]$ définie par $(e^{i\theta}, t) \mapsto (e^{i(\theta+2\pi t)}, t)$. On dessine l'image de la courbe horizontale β par TD.

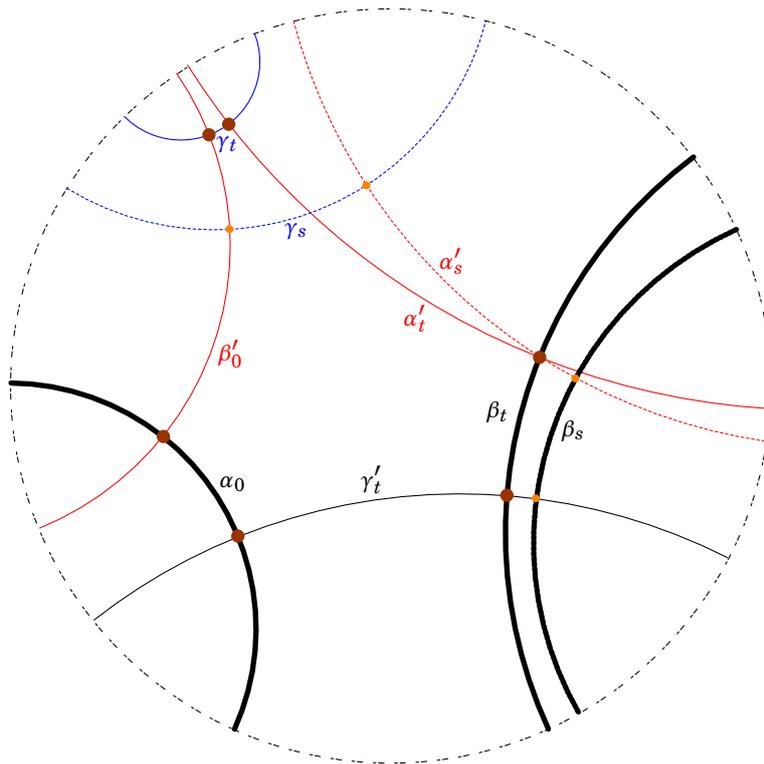
On remarquera que TD est égale à l'identité sur les deux bords, que les cercles "centraux" sont préservés.

Exemple (Un homéo d'une surface quelconque non homotope à l'identité)

On choisit une courbe fermée simple α tracée sur Σ , un voisinage qui est un cylindre de cette courbe, et on applique TD dans le cylindre et l'identité ailleurs. Ça marche parce qu'au bord TD c'est l'identité. **Faire un dessin**

Théorème X.2. — *Le groupe $\text{MCG}(\Sigma)$ est engendré par un nombre fini de twists de Dehn.*

2. Attention, f change aussi l'action de Γ sur $\tilde{\Sigma}$, en $\gamma^f = f\gamma f^{-1}$.



1d. Le π_1 en pratique. —

Remarque. — Si $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ et $* \in S$ alors il y a une bijection entre les lacets basés en $*$ modulo homotopie et les éléments de Γ , via l'application qui à γ associe la projection de n'importe quel chemin $* \rightsquigarrow \gamma*$.

C'est plus pratique d'oublier les points bases, on définit alors les classes d'homotopie libre de chemins. La bijection précédente induit une bijection entre les lacets tracés sur S (sans point base) et les classes de conjugaison de Γ . En clair, on choisit un point base, on prend un chemin sans point base, on lui met un point base de force et en faisant des choix, on utilise la bijection précédente, seule sa classe de conjugaison est bien définie ! On oublie le point base.

2. Le lemme de l'hexagone

Definition 2.1. — Un *hexagone marqué* est un couple (H, v) où H est un hexagone de \mathbb{H}^2 et v un sommet de H .

Definition 2.2. — Deux hexagones marqués sont *équivalents / isométriques* s'ils existent une isométrie g tel que $g(H_1) = H_2$ et $g(v_1) = v_2$.

Definition 2.3. — On note \mathcal{H} l'espace de déformation des hexagones à angles droits, c'est l'espace des hexagones marqués dont tous les angles sont droits modulo isométrie.

Theorem 2.4. — L'application $W : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_+^{*3}$ est un homéomorphisme qui à H associe les longueurs des côtés c_1, c_3 et c_5 , mesurés en partant de v dans le sens horaire.

Proof. — On va construire la bijection inverse $V : \mathbb{R}_+^{*3} \rightarrow \mathcal{H}$.

1. Soient α_0, β_t deux géodésiques à distance t .
2. On note γ'_t la perpendiculaire commune.
3. On note β'_0 et α'_t les géodésiques perpendiculaires à α_0 et β_t qui sont à distance a et b de γ'_t .
4. Il existe (unique) $t_0 > 0$ tel que $\beta'_0 \cap \alpha'_t = \emptyset$ et $d(\beta'_t, \alpha'_t) = 0$.
5. On suppose à présent $t > t_0$, on note γ_t l'unique perpendiculaire commune à β'_0 et α'_t .
6. La longueur l_t de l'arc γ_t dans l'hexagone varie continûment et $l_{t_0} = 0$ et $l_\infty = \infty$.
7. Le théorème des valeurs intermédiaires conclut l'existence.

Pour l'unicité, une fois la normalisation faite par une isométrie, il nous suffit de montrer que $t \mapsto l_t$ est strictement croissante. Pour montrer que $t \mapsto l_t$ est strictement croissante, on trace β_s pour $s > t$, la géodésique α'_s se positionne assez précisément, car $l_1 < b < l_2$, on regarde ensuite γ_s et on voit que $l_s > l_t$.

□

3. Les pantalons

Un pantalon c'est ça:

Theorem 3.1. — Soit P un pantalon. L'application "longueurs des bords" est un homéomorphisme de $T(P) \rightarrow \mathbb{R}_+^{*3}$.

Proof. — On va définir un homéomorphisme de $T(P)$ vers \mathcal{H} . Étant donné deux côtés d'un pantalon, on regarde toutes les courbes α , \mathcal{C}^1 par morceaux qui vont d'un côté à l'autre. On cherche à minimiser la longueur de la courbe α .

1. Si α n'est pas une géodésique alors en court-circuitant α on peut faire plus court donc si l'inf est atteint, il est atteint par une géodésique.
2. L'ensemble des géodésiques issues d'un côté est un compact ⁽³⁾ ⁽⁴⁾.
3. Donc, l'ensemble des géodésiques issues d'un côté et finissant sur un autre côté aussi.
4. Donc l'inf est atteint.
5. Toute géodésique minimisante arrive à angles droits des deux côtés.
6. Elle est unique puisque sinon on aurait un triangle avec deux angles droits si elles se croisent, ou un rectangle hyperbolique ce qui est absurde, si les deux minimisantes ne se croisent pas.

On note δ_{ij} les 3 géodésiques minimisantes. On sort les ciseaux, on obtient deux hexagones à angles droits qui sont égaux par unicité de l'hexagone à angles droits ayant 3 longueurs fixées. On a donc obtenu l'application $T(P) \rightarrow \mathcal{H}$, et son inverse est donné par on prend deux hexagones et on les colle.

□

Remarque. — On peut remarquer que les découpes coupent les bords en deux parties égales à chaque fois !

3. La topologie c'est la convergence \mathcal{C}^1 sur les compacts.

4. On considère surtout PAS qu'une géodésique c'est un point du bord et un angle, sinon la longueur n'est pas continue

4. Décomposition d'une surface en pantalons

Remarque (Dessin topologique). — On peut découper une surface de genre g en $2g - 2$ pantalons le long de $3g - 3$ courbes simples. *Indication: Car la caractéristique d'Euler est additive et $\chi(P) = -1$.*

5. Une application de $T(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}^{3g-3}$

Remarque. — Soit α un lacet tracé sur Σ , on note $[\alpha]$ la classe d'homotopie libre de α **Rappel !**. Les courbes $\varphi'(\alpha)$ et $I \circ \varphi(\alpha)$ sont librement homotopes comme lacet de S' puisque $I \circ \varphi$ et φ' sont homotopes. On peut donc considérer:

$$l_{(S,\varphi)}([\alpha]) = \inf\{\text{longueur } \varphi(\beta), \text{ où } \beta \text{ est librement homotope à } \alpha\}$$

Lemme X.3. — *Soit Γ discret, sans torsion et cocompacte alors tout élément de Γ est hyperbolique.*

Proof. — On définit: $R : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ par $R(x) = \inf_{\gamma \neq 1} d(x, \gamma x)$, cette application passe au quotient et elle est continue. S'il y a un parabolique alors son inf est nul, or ici le quotient est compact donc son inf est strictement positif. \square

Remarque. — Si γ est hyperbolique alors la projection de son axe fournit une géodésique librement homotope à tout lacet représentant γ , puisque l'axe est préservé par γ . Cette géodésique est simple si et seulement si les relevés des axes ne se croisent pas.

Lemme X.4. — *Soit c un lacet (resp. lacet simple) sur une surface hyperbolique $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ compacte, il existe un unique élément $\gamma \in \Gamma$ (à conjugaison près) tel que $\text{Axe}(\gamma)$ est librement homotope à c . De plus, si c est simple alors $\text{Axe}(\gamma)$ est aussi simple.*

Proof. — Soit γ l'unique élément de Γ , à conjugaison près, qui représente un lacet librement homotope à c . Comme γ est hyperbolique, γ est représenté par une géodésique, son axe ! L'unicité, c'est simplement l'unicité de γ à conjugaison près.

A présent, la dynamique de γ nous apprend que le relevé de c finit en γ^+ et commence en γ^- . Donc si les relevés de c ne se croisent pas alors les axes des conjugués de γ ne se croisent pas, d'où le résultat. \square

On choisit $3g - 3$ lacets simples sur la surface topologique Σ de genre g tel que le découpage de Σ le long de ces lacets est une réunion de pantalons, on appelle ça une *décomposition en pantalons*. On obtient une application Longueur : $T(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}_+^{3g-3}$.

6. L'énoncé finale

Théorème X.5. — *L'application longueur $T(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}_+^{3g-3}$ définit un \mathbb{R}^{3g-3} -fibré principal.*

Definition 6.1. — Un *fibré* est un quadruplet (E, B, π, F) où φ est une application continue surjective telle que, pour tout $b \in B$, il existe $\mathcal{U} \ni b$, et un homéo $\varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U} \times F$ tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{U} \times F \\ \pi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{proj} \\ \mathcal{U} \subset B & \xrightarrow{id} & \mathcal{U} \end{array}$$

On dit que E est l'espace total, B la base et F la fibre, on dit aussi que E est un fibré en F sur B , on note $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$.

Remarque. —

- Pour tout $b \in B$, $\pi^{-1}(b)$ est homéomorphe à F .
- φ est ouverte, donc E modulo "être dans la même fibre" est homéo à B .

Exemple. —

- Fibré trivial : Produit $B \times F$,
- Concrets: un ruban de Möbius (ouvert ou fermé), tore, et bouteille de Klein
- Généraux I: revêtement (cas F discret)
- Généraux II: le tangent, le tangent unitaire, le bi-tangent: couple de vecteurs tangents
- Généraux III: Suspension du tore, suspension d'une surface, suspension d'un difféo, mapping surface, $f : X \rightarrow X$ homéo, et $E = [0, 1] \times X / \sim$, et on projette sur le cercle.

$$[0, 1] \xrightarrow{id} \text{Cylindre} \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^1$$

$$[0, 1] \xrightarrow{x \mapsto 1-x} \text{Ruban de Möbius} \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^1$$

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{id} \text{Tore} \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^1$$

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{x \mapsto -x} \text{Bouteille de Klein} \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^1$$

Definition 6.2. — Un G -fibré principal est un triplet: un groupe G , un fibré et une action continue de G sur le fibré tel que G préserve les fibres, et l'action sur les fibres est simplement transitive.

Autrement dit, les fibres s'identifient à G mais il n'y a pas de neutre canonique.

Exemple. —

- Le fibré tangent d'une variété différentielle de dimension d est un \mathbb{R}^d -fibré principal.
- Le fibré des repères d'une variété différentielle de dimension d est un $\text{GL}_d(\mathbb{R})$ -fibré principal.
- Le fibré des repères orthonormés d'une variété différentielle de dimension d est un $\text{O}_d(\mathbb{R})$ -fibré principal.
- Le ruban de Möbius (ouvert) est un \mathbb{R}^* -fibré principal sur \mathbb{S}^1 .

Théorème X.6. — Un fibré sur une base contractile (p.ex homéomorphe à un \mathbb{R}^d) est trivial.

Corollary 6.3. — L'espace $T(\Sigma)$ est homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} .

Lemme X.7. — Soit Σ une surface topologique décomposé en pantalons, soit c une des courbes séparante du découpage, on note Σ_g et Σ_d les deux surfaces à bord obtenues en découpant le long de c . L'application:

$$T(\Sigma) \rightarrow T(\Sigma_g) \boxtimes_c T(\Sigma_d)$$

est un \mathbb{R} -fibré principal.

Lemme X.8. — Soit Σ une surface topologique décomposé en pantalons, soit c une des courbes non-séparante du découpage, on note Σ_c la surface à bord obtenue en découpant le long de c . L'application:

$$T(\Sigma) \rightarrow T(\Sigma_c)$$

est un \mathbb{R} -fibré principal.

Proof. — Le mieux c'est de regarder au niveau des représentations et de calculer le centralisateur de l'holonomie de c . □

iii Fin du Cours 12 ??

