LISTE DES SUJETS DES ORAUX POUR LE COURS DE M2 - 1ER SEMESTRE: GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Contents

Vous devez choisir un sujet de cette liste **OU** me proposer un théorème de votre choix, bien entendu le thème de ce théorème doit avoir un lien avec la géométrie hyperbolique.

1. Classification topologique des surfaces compactes

Théorème (Théorème 2.2.13 [Labourie] ou Koch [Koch])**.** *On note S_g la surface de genre g. Toute surface topologique compacte orientable est homéomorphe à l'une des surfaces S_g.*

Remarque. Il n'y pas de géométrie hyperbolique mais c'est un théorème important de géométrie. J'ai donné deux références indépendantes. Koch est probablement plus détaillé.

2. Inégalité de Jorgensen

Théorème (Théorème 5.4.1 de[Beardon])**.** *Soient f, g deux matrices de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$. *Supposons que le groupe engendré par f et g est discret et non-élémentaire alors:*

$$|\,Tr^2(f) - 4| + |\,Tr(fgf^{-1}g^{-1}) - 2| \geqslant 1$$

et l'inégalité est optimale.

Remarque. Beardon donne deux jolies applications de cette inégalité: Theorem 5.4.2 et 5.4.4. La deuxième est plus difficile que la première. La présentation de l'une de ces deux applications sera appréciée.

Remarque. Le fait que l'inégalité de Jorgensen est optimale n'est pas très important.

3. Lemme de Margulis

Théorème (Théorème III.4.3 de [Bergeron & Guilloux]). *Pour tout $d \geqslant 2$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(d) > 0$ tel que pour tout sous-groupe discret Γ du groupe Isom$^+(\mathbb{H}^d)$ et tout point $x \in \mathbb{H}^d$, le groupe $\Gamma_\varepsilon(x)$ engendré par les éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $d_{\mathbb{H}}(x, \gamma x) \leqslant \varepsilon$ contient un sous-groupe abélien distingué d'indice fini.*

Remarque. La démo commence avec le lemme II.4.1. On pourra admettre les versions euclidiennes et sphériques du lemme III.4.2.

Remarque. Attention, il y a une petite coquille dans la démo du théorème III.4.3: dernier paragraphe: H est le groupe engendré par $\Gamma_\varepsilon(x) \cap U$ et non égale à $\Gamma_\varepsilon(x) \cap U$, c'est juste une faute de frappe pas de raisonnement.

4. Limite de représentations fidèles et discrètes

Théorème (Théorème III.6.2 de [Bergeron & Guilloux]). *Soit Γ un sous-groupe discret non-élémentaire de Isom$^+(\mathbb{H}^d)$. Alors toute limite de représentations fidèles et discrètes de Γ est fidèle et discrète.*

Remarque. La démonstration de ce théorème utilise le lemme de Margulis, on l'admettra donc.

Remarque. Attention, les auteurs rédigent la démonstration du théorème en une demi page. Ca va assez vite, il faudra détailler certains passages.

5. Théorème de Hurwitz

Théorème (Théorème 5.11 de [Jones & Singerman]). *Soit S une surface hyperbolique compacte. Alors le groupe des isométries de S est d'ordre inférieur ou égale à $84(g-1)$.*

Remarque. On peut admettre le theorem 5.10.7 si besoin ou mieux le montrer dans un cas particulier.

Remarque. Les auteurs rédigent tout en parlant de surfaces de Riemann et d'automorphismes de surfaces de Riemann. Une surface de Riemann c'est pareil qu'une surface hyperbolique, et un automorphisme d'une surface de Riemann c'est pareil qu'une isométrie d'une surface hyperbolique.

Remarque. De façon général, il y a un lien entre normalisateur du groupe fondamental et le groupe d'automorphisme/isométrie du quotient, si ce lien est clair, tant mieux sinon vous pouvez lire le Theorem 5.9.4 de ce livre. Si ca ne passe pas, je serais content avec la version simplifiée suivante:

Théorème (Théorème 5.11 de [Jones & Singerman]). *Soit Γ un sous-groupe discret, sans torsion et cocompact de Isom$^+(\mathbb{H}^2)$, on note N le normalisateur de Γ. Alors, l'indice de Γ dans N est au plus $84(g-1)$.*

Remarque. Par contre, il faut me montrer le lemme (Théorème 5.7.5) qui dit que le normalisateur est un sous-groupe discret de Isom$^+(\mathbb{H}^2)$.

6. Lemme de Selberg et Malcev

Théorème (Lemme de Selberg). *Tout sous-groupe de type fini de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ est virtuellement sans torsion.*

Théorème (Lemme de Malcev). *Tout sous-groupe Γ de type fini de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ est résiduellement fini, i.e pour tout $\gamma \in \Gamma$ non-trivial, il existe un morphisme $\varphi : \Gamma \to F$ de Γ vers un groupe fini F tel que $\varphi(\gamma) \neq e$.*

Remarque. On pourra présenter :

- uniquement la preuve de ces deux lemmes pour le groupe $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$. C'est à dire la section 2 de [Nica].
- Ou bien faire le cas général en admettant par exemple le lemme 3.2 de Bogdan Nica.

7. Lemme du collier

Définition 1. Soit S une surface hyperbolique complète. Soit γ une géodésique fermée simple de longueur l tracée sur S. Le r-voisinage (ouvert) de γ dans $(S, d_{induite})$ est un *collier* lorsque qu'il est homéomorphe à un cylindre. La *largeur* de γ est le supremum des $r \in \mathbb{R}$ tel que le r-voisinage de γ est un collier.

Théorème (Proposition 3.18 de [Buser])**.** *Soit S une surface hyperbolique complète. Soit γ une géodésique fermée simple de longueur l tracée sur S alors la largeur de γ est supérieure ou égale à:*

$$\frac{1}{\mathrm{sh}(l/2)}$$

Remarque. L'énoncé de Buser, proposition 3.18 est donnée pour les pantalons. La décomposition en pantalons d'une surface hyperbolique donne le cas général.

Remarque. Dans sa démo Buser utilise un lemme (la formule du pentagone Theorem 2.3.4i), sa démonstration sera appréciée.

8. Hyperbolisation des polygones du plan hyperbolique

Théorème (Théo 7.16.2 de [Beardon])**.** *Soit $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ un n-uplet de réels appartenant à $[0, \pi[$. Alors, il existe un polygone P de $\mathbb{H}^2$ tel que les angles de P apparaissant dans le sens des aiguilles d'une montre sont donnés par $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ si et seulement si:*

$$\theta_1 + \cdots + \theta_n < (n-2)\pi$$

Remarque. Lorsque $n = 3$, ce théorème a été vu en cours et on peut (et doit) utiliser cet énoncé sans démonstration.

Remarque. Pour montrer ce théorème, il faut avoir montrer au préalable un lemme de trigonométrie hyperbolique (Theorem 7.11.3 chez Beardon). La démonstration de ce lemme sera apprécié.

9. Théorème de la développante

Théorème (Partie I.2, proposition I.2.2 et I.2.4 de [Bergeron & Guilloux])**.** *Soit S une surface hyperbolique. Il existe un homéomorphisme local $D : \tilde{S} \to \mathbb{H}^2$ et une représentation $\rho : \pi_1(S) \to Isom(\mathbb{H}^2)$ tel que D est ρ-équivariante. De plus, si (D', ρ') est une autre telle paire alors il existe $g \in Isom(\mathbb{H}^2)$ tel que $D' = g \circ D$ et $\rho' = g\rho g^{-1}$.*

Remarque. Dans le cours de Bergeron-Guilloux, la preuve est rédigé dans le language des (G, X)-structure, prenez $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ et $X = \mathbb{H}^2$ et tout va bien.

10. sur les cercles inscrits

Théorème (Theorem 7.14.1 et 7.14.2, [Beardon])**.** *Les bissectrices d'un triangle du plan hyperbolique se rencontrent en un point qui est le centre du cercle inscrit. De plus le rayon du cercle inscrit est donné par la formule du théorème 7.14.2.*

Remarque. Ce n'est pas très difficile, c'est de la trigonométrie hyperbolique. On fera donc les lemmes nécessaires aux théorèmes et ce serait bien aussi de montrer que le rayon du cercle inscrit est borné indépendamment du triangle (Ce n'est pas fait dans Beardon mais c'est facile de le montrer avec le théorème 7.14.2).

11. Théorème de Poincaré

Théorème (de la Harpe, proposition 35, [Harpe])**.** *Soit P un polygone du plan hyperbolique dont les angles sont de la forme $\frac{\pi}{m}$ avec $m \in \{2, 3, ..., \infty\}$. On note Γ le groupe engendré par les réflexions le long des côtés de P, le groupe Γ agit proprement sur $\mathbb{H}^2$ et P est un domaine fondamental localement fini pour cette action.*

Remarque. La démonstration de la Harpe est assez rapide. Faites bien attention à bien comprendre ce qui se passe. Pour une démo détaillée, on pourra lire Iversen: hyperbolic geometry section 7.1.

12. Théorème de Bieberbach en dimension 2

Théorème (Proposition 2 de la partie 3 de de [Pilaud])**.** *Soit Γ un sous-groupe discret des isométries directes de $\mathbb{R}^2$. On suppose que l'action de Γ sur $\mathbb{R}^2$ est cocompact. Alors, ils existent $T, S \in \Gamma$ deux translations tels que le groupe engendré par T et S est d'indice inférieure ou égale à 6 dans Γ.*

Remarque. On pourra aussi donner la liste de tels groupes Γ à isomorphisme près.

References

[Beardon] Alan Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[Bergeron & Guilloux] Nicolas Bergeron & Antonin Guilloux *Géométrie hyperbolique et représentations de groupes de surface*, https://webusers.imj-prg.fr/ nicolas.bergeron/Enseignement_files/GeomHyp.pdf

[Buser] Peter Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces.*

[Harpe] Pierre de la Harpe. *Topics in geometric group theory.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.

[Jones & Singerman] Gareth Jones & David Singerman. *Complex functions, an algebraic and geometric viewpoint.*

[Nica] Bogdan Nica. *Linear groups - Malcev's theorem and Selberg's lemma.* https://arxiv.org/abs/1306.2385

[Koch] Richard Koch. *Classification of surfaces*, http://pages.uoregon.edu/koch/math431/Surfaces.pdf.

[Labourie] François Labourie. *Lectures on Representations of Surface Groups*, http://math.unice.fr/ labourie/preprints/pdf/surfaces.pdf

[Pilaud] Vincent Pilaud *Pavages Périodiques*, http://www.lix.polytechnique.fr/ pilaud/enseignement/agreg/pavages/pavages.pdf