1. Classification topologique des surfaces compactes

***Théorème* (Labourie, Theorem 2.2.13 or Koch).** — *On note S_g la surface de genre g. Toute surface topologique compacte orientable est homéomorphe à l'une des surfaces S_g.*

Remarque. — Il n'y pas de géométrie hyperbolique mais c'est un théorème important de géométrie. J'ai donné deux références indépendantes. Koch est probablement plus détaillé.

2. Inégalité de Jorgensen

***Théorème* (Beardon, 5.4.1, [Bea95]).** — *Soient f, g deux matrices de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$. *Supposons que le groupe engendré par f et g est discret et non-élémentaire alors :*

$$|\,Tr^2(f) - 4| + |\,Tr(fgf^{-1}g^{-1}) - 2| \geqslant 1$$

et l'inégalité est optimale.

Remarque. — Beardon donne deux jolies applications de cette inégalité : Theorem 5.4.2 et 5.4.4. La deuxième est plus difficile que la première. La présentation de l'une de ces deux applications sera appréciée.

Remarque. — Le fait que l'inégalité de Jorgensen est optimale n'est pas très important.

3. Lemme de Margulis

***Théorème* (Bergeron-Guilloux, Théorème III.4.3).** — *Pour tout $d \geqslant 2$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(d) > 0$ tel que pour tout sous-groupe discret Γ du groupe $Isom^+(\mathbb{H}^d)$ et tout point $x \in \mathbb{H}^d$, le groupe $\Gamma_\varepsilon(x)$ engendré par les éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $d_{\mathbb{H}}(x, \gamma x) \leqslant \varepsilon$ contient un sous-groupe abélien distingué d'indice fini.*

Remarque. — La démo commence avec le lemme II.4.1. On pourra admettre les versions euclidiennes et sphériques du lemme III.4.2.

Remarque. — Attention, il y a une petite coquille dans la démo du théorème III.4.3 : dernier paragraphe : H est le groupe engendré par $\Gamma_\varepsilon(x) \cap U$ et non égale à $\Gamma_\varepsilon(x) \cap U$, c'est juste une faute de frappe pas de raisonnement.

4. Limite de représentations fidèles et discrètes

***Théorème* (Bergeron-Guilloux, Théorème III.6.2).** — *Soit Γ un sous-groupe discret non-élémentaire de $Isom^+(\mathbb{H}^d)$. Alors toute limite de représentations fidèles et discrètes de Γ est fidèle et discrète.*

Remarque. — La démonstration de ce théorème utilise le lemme de Margulis, on l'admettra donc.

Remarque. — Attention, les auteurs rédigent la démonstration du théorème en une demi page. Ca va assez vite, il faudra détailler certains passages.

5. Théorème de Hurwitz

***Théorème* (Jones-Singerman, Theorem 5.11, [JS]).** — *Soit S une surface hyperbolique compacte. Alors le groupe des isométries de S est d'ordre inférieur ou égale à $84(g-1)$.*

***Remarque*.** — On peut admettre le theorem 5.10.7 si besoin ou mieux le montrer dans un cas particulier.

***Remarque*.** — Les auteurs rédigent tout en parlant de surfaces de Riemann et d'automorphismes de surfaces de Riemann. Une surface de Riemann c'est pareil qu'une surface hyperbolique, et un automorphisme d'une surface de Riemann c'est pareil qu'une isométrie d'une surface hyperbolique.

***Remarque*.** — De façon général, il y a un lien entre normalisateur du groupe fondamental et le groupe d'automorphisme/isométrie du quotient, si ce lien est clair, tant mieux sinon vous pouvez lire le Theorem 5.9.4 de ce livre. Si ca ne passe pas, je serais content avec la version simplifiée suivante :

***Théorème* (Jones-Singerman, Theorem 5.11).** — *Soit Γ un sous-groupe discret, sans torsion et cocompact de Isom$^+(\mathbb{H}^2)$, on note N le normalisateur de Γ. Alors, l'indice de Γ dans N est au plus $84(g-1)$.*

***Remarque*.** — Par contre, il faut me montrer le lemme (Théorème 5.7.5) qui dit que le normalisateur est un sous-groupe discret de $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$.

6. Domaine fondamental de Dirichlet

***Théorème* (Beardon, 9.4.2,[Bea95]).** — *Soit Γ un sous-groupe discret de Isom$^+(\mathbb{H}^2)$. Soit $w \in \mathbb{H}^2$ dont le stabilisateur est trivial, le polygone de Dirichlet D de Γ basé en w est un domaine fondamental convexe localement finie pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}^2$.*

***Remarque*.** — N'importe quel livre de géométrie hyperbolique contient cette preuve. Elle est identique en dimension 2 ou d quelconque.

***Remarque*.** — La présentation de l'application (exemple 9.4.4 dans Beardon) : domaine fondamental pour $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sera appréciée.

***Remarque*.** — En anglais : ouvert connexe = domain. En français, idem mais l'utilisation est plus rare.

7. Lemme du collier

***Définition 1*.** — Soit S une surface hyperbolique complète. Soit γ une géodésique fermée simple de longueur l tracée sur S. Le r-voisinage (ouvert) de γ dans $(S, d_{induite})$ est un *collier* lorsque qu'il est homéomorphe à un cylindre. La *largeur* de γ est le supremum des $r \in \mathbb{R}$ tel que le r-voisinage de γ est un collier.

***Théorème* (Buser, proposition 3.18, [Bus]).** — *Soit S une surface hyperbolique complète. Soit γ une géodésique fermée simple de longueur l tracée sur S alors la largeur de γ est supérieure ou égale à :*

$$\frac{1}{\mathrm{sh}(l/2)}$$

***Remarque*.** — L'énoncé de Buser, proposition 3.18 est donnée pour les pantalons. La décomposition en pantalons d'une surface hyperbolique donne le cas général.

Remarque. — Dans sa démo Buser utilise un lemme (la formule du pentagone Theorem 2.3.4i), sa démonstration sera appréciée.

8. Hyperbolisation des polygones du plan hyperbolique

***Théorème* (Beardon, Théo 7.16.2, [Bea95]).** — *Soit $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ un n-uplet de réels appartenant à $[0, \pi[$. Alors, il existe un polygone P de $\mathbb{H}^2$ tel que les angles de P apparaissant dans le sens des aiguilles d'une montre sont donnés par $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ si et seulement si :*

$$\theta_1 + \cdots + \theta_n < (n-2)\pi$$

Remarque. — Lorsque $n = 3$, ce théorème a été vu en cours et on peut (et doit) utiliser cet énoncé sans démonstration.

Remarque. — Pour montrer ce théorème, il faut avoir montrer au préalable un lemme de trigonométrie hyperbolique (Theorem 7.11.3 chez Beardon). La démonstration de ce lemme sera apprécié.

9. Théorème de la développante

***Théorème* (Bergeron-Guilloux, partie I.2, proposition I.2.2 et I.2.4)**

Soit S une surface hyperbolique. Il existe un homéomorphisme local $D : \tilde{S} \to \mathbb{H}^2$ et une représentation $\rho : \pi_1(S) \to Isom(\mathbb{H}^2)$ tel que D est ρ-équivariante. De plus, si (D', ρ') est une autre telle paire alors il existe $g \in Isom(\mathbb{H}^2)$ tel que $D' = g \circ D$ et $\rho' = g\rho g^{-1}$.

Remarque. — Dans le cours de Bergeron-Guilloux, la preuve est rédigé dans le language des (G, X)-structure, prenez $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ et $X = \mathbb{H}^2$ et tout va bien.

10. Les cercles inscrits

***Théorème* (Theorem 7.14.1 et 7.14.2, [Bea95]).** — *Les bissectrices d'un triangle du plan hyperbolique se rencontrent en un point qui est le centre du cercle inscrit. De plus le rayon du cercle inscrit est donné par la formule du théorème 7.14.2.*

Remarque. — Ce n'est pas très difficile, c'est de la trigonométrie hyperbolique. On fera donc les lemmes nécessaires aux théorèmes et ce serait bien aussi de montrer que le rayon du cercle inscrit est borné indépendamment du triangle (Ce n'est pas fait dans Beardon mais c'est facile de le montrer avec le théorème 7.14.2).

11. Théorème de Poincaré

***Théorème* (de la Harpe, proposition 35, [dlH00]).** — *Soit P un polygone du plan hyperbolique dont les angles sont de la forme $\frac{\pi}{m}$ avec $m \in \{2, 3, ..., \infty\}$. On note Γ le groupe engendré par les réflexions le long des côtés de P, le groupe Γ agit proprement sur $\mathbb{H}^2$ et P est un domaine fondamental localement fini pour cette action.*

Remarque. — La démonstration de la Harpe est assez rapide. Faites bien attention à bien comprendre ce qui se passe. Pour une démo détaillée, on pourra lire Iversen : hyperbolic geometry section 7.1.

12. Groupes arithmétiques II

13. Hyperbolisation du complémentaire du noeud de 8

14. Mapping Class Group

Centre du MCG, relation entre les twists de Dehn.

Références

[Bea95] Alan Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[Bus] Peter Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces.*

[dlH00] Pierre de la Harpe. *Topics in geometric group theory.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.

[JS] Gareth Jones and David Singerman. *Complex functions, an algebraic and geometric viewpoint.*