UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie Hyperbolique

Devoir Maison du 18 octobre.
Retour le 15 novembre.

Les exercices 1 à 4 ne sont pas indépendants mais vous êtes libre d'utiliser les réponses comme vous le souhaitez. L'exercice 5 est indépendant du reste.

Exercice 1

On considère deux rayons géodésiques[1] r_1, r_2 de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^d$. On suppose que $r_1(+\infty) = p_1 \in \partial\mathbb{H}^d$ et $r_2(+\infty) = p_2 \in \partial\mathbb{H}^d$.
Toute méthode alternative aux démonstrations suggérées est acceptée.

1. Montrer que si $p_1 \neq p_2$ alors[2] :

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{dist}_{\mathbb{H}^d}(r_1(t), r_2(t)) = +\infty$$

2. On suppose à présent que $p_1 = p_2 = p$ et on suppose de plus qu'il existe une horosphère centrée en p contenant $r_1(0)$ et $r_2(0)$. On veut montrer que :

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{dist}_{\mathbb{H}^d}(r_1(t), r_2(t)) = 0$$

(a) On commence par un cas particulier. Supposer que $d = 2$, on se place dans le modèle $\mathbb{H}^2 = U^2$, et enfin on suppose que $r_1(t) = e^t i$ et $r_2(t) = 1 + e^t i$. Montrer le lemme dans ce cas.

(b) Montrer que le cas général.

3. On retire à présent l'hypothèse "'il existe une horosphère centrée en p contenant $r_1(0)$ et $r_2(0)$". Montrer que la fonction $t \mapsto d(r_1(t), r_2(t))$ est bornée.

Exercice 2

Soit (X, dist_X) un espace métrique. On introduit la relation d'équivalence suivante sur l'ensemble des rayons $\mathrm{Ray}(X)$ de X :

$$r \sim r' \quad \text{lorsque} \quad \exists R > 0, \forall t \geqslant 0, \quad \mathrm{dist}_X(r(t), r'(t)) \leqslant R$$

1. Vérifier que $\sim$ est bien une relation d 'équivalence.

2. Expliquer pourquoi la fonction $\Psi : \mathrm{Ray}(\mathbb{H}^d) \to \partial\mathbb{H}^d$, $r \mapsto r(+\infty)$ est bien définie.

3. On munit $\mathrm{Ray}(\mathbb{H}^d)$ de la topologie quotient. Montrer que Ψ est un homéo.

4. Qui joue le rôle de $\partial\mathbb{H}^d$ dans le cas de $X = \mathbb{E}^d$?

Exercice 3

Soit (X, dist_X) un espace métrique. On fixe un point $x_0 \in X$ et on ne considère que des rayons issus de x_0, c'est à dire tel que $r(0) = x_0$. Si $r : [0, +\infty[\to X$ est un rayon géodésique alors on notera :

$$B_r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{dist}_X(x, r(t)) - t$$

---

1. On rappelle qu'un *rayon géodésique* est une isométrie $r : [0, +\infty[\to X$.
2. On pourra par exemple commencer par se donner $R, \varepsilon > 0$ tel que $B_{euc}(p_1, \varepsilon) \cap B_{euc}(p_2, \varepsilon) = \varnothing$. Puis montrer qu'il existe alors $t_0 > 0$ tel que pour tout $t > t_0$, pour $i = 1, 2$, $B_{hyp}(r_i(t), R) \subset B_{euc}(p_i, \varepsilon)$, et conclure... **Ou** Faire un calcul dans une configuration explicite et exploiter ensuite le groupe des isométries pour conclure.

1. Montrer que B_r est minorée et décroissante.
2. On suppose que $X = \mathbb{E}^d$ ou $\mathbb{H}^d$. Montrer que si $r \sim r'$ alors $\lim_{t\to+\infty} B_r(t) = \lim_{t\to+\infty} B_{r'}(t)$. On notera $B_p(x)$ cette limite, où $p = r = (+\infty) = r'(+\infty)$. *Faire les cas $X = \mathbb{H}^d$ et $\mathbb{E}^d$ séparement.*
3. Dans le cas $X = \mathbb{E}^d$, identifier l'hypersurface $B_p(x) = 0$?
4. Dans le cas $X = U^d$, $p = \infty$, identifier l'hypersurface $B_p(x) = 0$?
5. Idem pour p quelconque.
6. En déduire une définition alternative des horosphères de l'espace hyperbolique.

Exercice 4

On se place dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^d$. Soit $\mathcal{H}$ une horosphère de centre $p \in \mathbb{H}^d$, soit $x \in \mathbb{H}^d$ à l'extérieur de l'horoboule associée à $\mathcal{H}$. On note $\pi = [x, p[\cap \mathcal{H}$. On veut montrer que

$$\forall y \in \mathcal{H}, \quad d(x,y) \geqslant d(x,\pi) \quad \text{avec égalité si et seulement si} \quad y = \pi$$

Toute méthode alternative à la démonstration suggérée est acceptée.

1. On commence par un cas particulier. On suppose que $d = 2$, $\mathbb{H}^2 = U^2$, et on suppose que $p = \infty$, $\mathcal{H} = \{z = x_1 + ix_2 \in U^2 \,|\, x_2 = 1\}$. Faire un dessin.
2. Réécrire l'inégalité à démonter en utilisant la formule $d(x,y) = |\ln([u,x,y,v])|$ où $u, v \in \partial\mathbb{H}^2$ sont les extrémités de la géodésique passant par x et y.
3. Démontrer l'inégalité.
4. Faire le cas général.

Exercice 5

Soit h une similitude de rapport $\lambda < 1$ et de centre a ; et g une isométrie de $\mathbb{E}^d$. *On cherche à comprendre quand le groupe Γ engendré par h et g est discret.*

1. Montrer que $g = R \circ T$ où T est une translation de vecteur u, R une isométrie avec un point fixe et $RT = TR$.
2. Trouver la limite de la suite $h^n g h^{-n}$, lorsque $n \to +\infty$.
3. En déduire que si Γ est discret alors $u = 0$ et $a \in \mathrm{Fix}(R)$.
4. Montrer que Γ est discret si et seulement si $hg = gh$ et g est d'ordre fini.
5. Avec des méthodes similaires, soient g, h deux similitudes qui ne sont pas des isométries. Trouver une caractérisation de l'assertion : "le groupe Γ engendré par g et h est discret".