UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie Hyperbolique

Devoir Maison du 14 octobre.
Retour le 16 novembre.

Le but de ce devoir maison est de montrer le théorème suivant :

Théorème (Dirichlet) : Soit Γ un sous-groupe discret du groupe des isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}$ de dimension d. Il existe un domaine fondamental convexe localement fini pour l'action du groupe Γ sur $\mathbb{H}$.

On dit qu'un fermé D de $\mathbb{H}$ est un *domaine fondamental* pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}$ lorsque :

- $\bigcup_\gamma \gamma(D) = \mathbb{H}$.
- $\forall \gamma \in \Gamma, \quad \gamma(\mathring{D}) \cap \mathring{D} \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1$, où $\mathring{D}$ est l'intérieur de D.

On rappelle qu'un sous-ensemble $D \subset \mathbb{H}$ est *convexe*, lorsque pour tout $x, y \in D$, le segment $[x, y]$ est inclus dans D. Enfin, un domaine fondamental D est *localement fini* lorsque :

Pour tout compact de $\mathbb{H}$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \,|\, \gamma(D) \cap K\}$ est fini.

Les exercices 1 et 2 proposent deux lemmes pour parvenir à la démonstration de ce théorème qui est proposé dans l'exercice 3. Cet énoncé est classique et on peut en trouver une démonstration dans n'importe quel livre de géométrie hyperbolique (par exemple voir la section 9.4 dans Beardon [1]...). L'exercice 4 donne le calcul du domaine fondamental de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ agissant sur le demi-plan de Poincaré.

Exercice 1

Soient $x, y \in \mathbb{H}$ avec $x \neq y$, on considère l'ensemble :

$$\mathcal{M}_{xy} = \{z \in \mathbb{H} \,|\, d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(y, z)\}$$

Montrer que $\mathcal{M}_{xy}$ est un hyperplan de $\mathbb{H}$, et que $\mathbb{H} \smallsetminus \mathcal{M}_{xy}$ possède deux composantes connexes, l'une contenant x, l'autre y. On appelle $\mathcal{M}_{xy}$ l'hyperplan médiateur de x et y. On propose des étapes de démonstration utilisant le modèle du demi-hyperboloïde, mais vous pouvez utiliser un autre modèle si vous vous sentez plus à l'aise dans un autre modèle. On

1. Noter que pour Beardon, c'est $\mathring{D}$ le domaine fondamental...

considère la forme quadratique $q(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_d^2$ sur $\mathbb{R}^{d+1}$. On note $\mathbb{H}$ le modèle de l'espace hyperbolique associé au demi-hyperboloïde $\{x \in \mathbb{R}^{d+1} \,|\, q(x) = -1, x_d > 0\}$.

- Soit Π le plan de $\mathbb{R}^{d+1}$ contenant x et y. Montrer que $\Pi^\perp$ est un sous-espace de dimension $d-1$.
- On note H l'espace vectoriel engendré par $\Pi^\perp$ et m le milieu du segment $[x, y]$. Montrer que H est un hyperplan.
- On note σ la réflexion qui préserve q par rapport à H. Conclure à l'aide de σ.

Exercice 2

Soient $x \in \mathbb{H}$ et $(y_n)_n$ une suite de points de $\mathbb{H}$. On suppose que $y_n \to y_\infty \in \partial\mathbb{H}$.

- Ou bien, dans le modèle de Klein : On note E_{xy_n} le sous-espace projectif de $\mathbb{RP}^d$ engendré par $\mathcal{M}_{xy_n}$. Montrer que E_{xy_n} converge vers l'hyperplan tangent à $\partial\mathbb{H}$ en y_∞.
- Ou bien dans un autre modèle : Montrer que $\mathcal{M}_{xy_n} \to \{y_\infty\}$ pour la topologie de Hausdorff sur les compacts de $\overline{\mathbb{H}}$, c'est à dire montrer que pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de $\overline{\mathbb{H}}$ contenant y_∞, il existe N un entier, tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $\mathcal{M}_{xy_n} \subset \mathcal{U}$.

Exercice 3

Soit Γ un sous-groupe discret du groupe des isométries de $\mathbb{H}$. Soit $o \in \mathbb{H}$. On note :

$$D_o = \{x \in \mathbb{H} \mid d(o, x) \leqslant d(o, \gamma x),\, \forall \gamma \in \Gamma\}$$

On appelle D_o le *domaine de Dirichlet* basé en o. On note A_y l'adhérence de la composante connexe de $\mathbb{H} \smallsetminus \mathcal{M}_{oy}$ qui contient o.

- Montrer que $D_o = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma o}$.
- En déduire que D_o est convexe.
- Soit K un compact de $\mathbb{H}$. Montrer que l'ensemble suivant est fini :

$$\{\delta \in \Gamma \,|\, \delta(D) \cap K \neq \varnothing\}$$

- Montrer que l'intérieur $\mathring{D}_o$ de D_o est non vide et égal à :

$$\{x \in \mathbb{H} \mid d(o, x) < d(o, \gamma x),\, \forall \gamma \in \Gamma\}$$

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{H}$, il existe un $\delta \in \Gamma$ tel que $\delta x \in D_o$ [2].
- Soit $\delta \in \Gamma$ tel que $\delta(\mathring{D}_o) \cap \mathring{D}_o \neq \varnothing$. Montrer que $\delta(o) = o$.
- Réaliser que vous avez montré le théorème suivant : Soit Γ un sous-groupe discret du groupe des isométries de $\mathbb{H}$. Soit $o \in \mathbb{H}$ tel que $\mathrm{Stab}_o = 1$. Alors l'ensemble D_o est un domaine fondamental convexe localement fini pour l'action de $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}$.

2. Prendre δ tel que $\delta^{-1}o$ est le point de $\Gamma \cdot o$ le plus proche de x.

Exercice 4

On considère l'action du groupe $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Montrer que l'ensemble E suivant est le domaine de Dirichlet D_{2i} basé en $2i$:

$$E = \{z \in \mathbb{H} \,|\quad -\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } |z| \geqslant 1\}$$

- Montrer que $D_{2i} \subset E$.
- Par l'absurde, supposer que $E \not\subset D_{2i}$, en déduire l'existence d'un $\gamma \in \Gamma$ et d'un $z \in E \cap D_{2i}$ tel que $\gamma z \in E$.
- On note $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que $|cz + d|^2 > (|c| - |d|)^2 + |cd|$.
- Montrer que $(|c| - |d|)^2 + |cd| \geqslant 1$.
- En déduire que $\mathrm{Im}(\gamma z) < \mathrm{Im}(z)$.
- Conclure.

Exercice 5

Soit D un domaine fondamental pour Γ. On définit l'ensemble suivant :

$$S = \{\gamma \in \Gamma \,|\, \gamma(D) \cap D \neq \varnothing\}$$

Montrer que le groupe engendré par le sous-ensemble S est le groupe Γ tout entier.