UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Courbes et Surfaces Paramétrées

TD n°5 : Courbes gauches

Exercice 1

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que :
$$|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|^2 + |\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|^2 = |u|^2|v|^2$$
2. Montrer que l'aire du parallélogramme de côtés $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ est $|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|$. Profitez-en pour calculer l'aire d'un triangle de sommets $A, B, C \in \mathbb{R}^3$.
3. Pour $\overrightarrow{u} = (3, -1, 2)$, $\overrightarrow{v} = (2, 1, -1)$ et $\overrightarrow{w} = (1, -2, 2)$. Calculer :
$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w}$$
En particulier, remarquer que $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) \neq (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w}$

Exercice 2

Soient $abcd$ un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$. Soient $\overrightarrow{u_a}, ..., \overrightarrow{u_d}$ où $\overrightarrow{u_m}$ est le vecteur perpendiculaire à la face F_m opposée à m, dirigée vers l'extérieur du tétraèdre et de norme l'aire de la face F_m. On veut montrer que :
$$\overrightarrow{u_a} + \cdots + \overrightarrow{u_d} = 0$$
On fixe l'origine d'un repère en a. On note $\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}, \overrightarrow{D}$ le vecteur $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{ac}$ et $\overrightarrow{ad}$.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{u_a}, ..., \overrightarrow{u_d}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}, \overrightarrow{D}$ et de produit vectoriel.
2. Conclure en développant.

Exercice 3

Soient abc un triangle du plan. En notant les vecteurs de chaque côté $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ et A, B, C le longueurs des côtés, et en utilisant le produit vectoriel, montrer que :
$$\frac{\sin \hat{a}}{A} = \frac{\sin \hat{b}}{B} = \frac{\sin \hat{c}}{C}$$

Exercice 4

Un corps rigide tourne à la vitesse ω autour de l'axe verticale. On fixe l'origine en un point O du corps rigide. Soit M un point de ce corps rigide. On note $\overrightarrow{\omega}$ le vecteur verticale, de norme ω, orienté vers le haut si le corps tourne dans le sens trigo. Montrer que la vitesse $\overrightarrow{V}$ du point M est donnée par :
$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}.$$

Exercice 5

On étudie les deux courbes suivantes :

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \qquad g(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \\ e^t \end{pmatrix}$$

- Déterminer le vecteur tangent unitaire $\overrightarrow{T}$ en tout point régulier des courbes définies par les paramétrages cartésiens :
- Montrer que la tangente en tout point régulier de la courbe $t \mapsto g(t)$ fait un angle constant avec l'axe de la troisième coordonnée (Oz).
- Montrer que f est tracée sur le cylindre d'axe (Oz) et de rayon 1.
- Montrer que f est tracée sur le "paraboloïde hyperbolique" d'équation $z = 2xy$.
- Montrer que f est tracée sur le "cylindre parabolique" d'équation $z = (x-y)^2 - 1$.
- "Tracer" la courbe f. On appelle f la courbe de la crêpe.
- Montrer que g est tracée sur le "cône de révolution" d'équation : $z^2 = x^2 + y^2$.
- "Tracer" la courbe g. On appelle g est une *hélice conique*.

Exercice 6

Déterminer le plan osculateur au point de paramètre t des courbes suivantes :

1. $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$
2. $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$
3. $\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t^4 \end{pmatrix}$
4. $\gamma_4(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \\ e^t \end{pmatrix}$

Exercice 7

Calculer la courbure et la torsion des courbes $\gamma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ suivantes :

1. $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$
2. $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$
3. $\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ \sqrt{2}t \end{pmatrix}$
4. $\gamma_4(t) = \begin{pmatrix} e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) \\ e^t \end{pmatrix}$

Exercice 8

Soit γ un arc birégulier paramétrée par la longueur d'arc. *On suppose que γ est inclus dans la sphère de centre l'origine et de rayon* 1.

1. Montrer que $(\gamma | T) = 0$.
2. En déduire qu'il existe deux fonctions a, b telles que :

$$\gamma = aN + bB \quad \text{ et } \quad a^2 + b^2 = 1$$

3. Calculer a et b, en fonction de K et τ.

4. En déduire que K et τ vérifient l'équation :

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{K}\right)' \frac{1}{\tau}\right)^2 = 1$$

Exercice 9

Soit γ un arc birégulier paramétrée par la longueur d'arc. *On suppose que la courbure K et la torsion τ vérifie l'équation différentielle :*

$$\left(\frac{1}{K}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{K}\right)' \frac{1}{\tau}\right) = 1$$

1. Montrer qu'il existe deux fonctions a, b telles que l'arc suivant soit de dérivée nulle

$$\gamma - aN - bB$$

2. Vérifier que $a^2 + b^2$ est constante.
3. En déduire que γ est sur une sphère.

Exercice 10

On dit qu'un arc régulier γ de classe $\mathcal{C}^1$ est une hélice si ses tangentes font un angle constant avec une direction fixe qui est appelée *l'axe de l'hélice.*

1. Soit γ de classe $\mathcal{C}^3$ birégulière et de torsion non nulle. On note K la courbure et τ la torsion. On suppose γ paramétrée par la longueur d'arc. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) γ est une hélice ;
   (b) la normale à γ est incluse dans un plan fixe ;
   (c) la binormale à γ fait un angle constant avec une direction fixe ;
   (d) la fonction K/τ est constante.

   On pourra montrer les implications dans l'ordre suivant : a) $\Rightarrow$ b), b) $\Rightarrow$ a), b) $\Rightarrow$ c), c) $\Rightarrow$ b), puis a+b+c) $\Rightarrow$ d) et enfin d) $\Rightarrow$ b). Pour l'implication, on pourra montrer que $\lambda T + B$ est un vecteur constant où $\lambda = K/\tau$.
   Montrer que si elles sont vérifiées alors la direction de l'hélice est bien définie.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Montrer que la courbe $t \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt)$ est une hélice d'axe (Oz). Calculer sa courbure et sa torsion.
3. Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$ que l'on oriente par le choix d'un vecteur unitaire normal $\overrightarrow{k}$ et γ un arc de P paramétrisé à vitesse a. Soient $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Montrer que la courbe :

$$\Gamma(s) = \gamma(s) + (bs + c)\overrightarrow{k}$$

   est une hélice dont précisera l'axe. On dit que γ est la *directrice* de l'hélice. Comparer la courbure de l'hélice et la courbure de sa directrice.
4. Montrer que toute hélice peut être obtenue par le procédé de la question précédente et admet donc une directrice.