Courbes et Surfaces Paramétrées

TD n°4 :
Courbe implicite

Exercice 1

1. Montrer que la relation :
$$x^4 + y^3 - 2x^2y - 1 = 0$$
définit implicitement y comme une fonction de x au voisinage du point $(0,1)$.
2. Idem au voisinage de $(0,0)$ pour la relation :
$$\sin y + y + e^x = 1$$
3. Idem au voisinage de $(0,1)$ pour la relation :
$$x^3 + y^3 - 3xy = 1$$

Exercice 2

Montrer que la courbe implicite :
$$y^3 + (x^2+1)y + x^4 = 0$$
définit implicitement une fonction $\varphi : x \mapsto y$ définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 3

Etudier* les coniques suivantes :
$$x^2 + 2y^2 = 4 \qquad x^2 - 3y^2 = 1 \qquad x^2 + 2x + y = 0$$
$$x^2 + xy + y^2 = 1 \qquad 2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1 \qquad x^2 + 2xy + y^2 = 1$$
* C'est à dire, pour chaque conique, chercher ses axes de symétrie, les points dont les tangentes sont orthogonales aux axes de symétrie, les asymptotes. Tracer. *Un changement de repère peut aider mais n'est pas nécessaire.*

Exercice 4

Soit P un polynôme de degré n, scindé à racines simples, dont le coefficient dominant est 1.

1. Rappeler la forme de P à l'aide de ses racines.
2. Tracer grossièrement $x \mapsto P(x)$.
3. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ définie implicitement par $y^2 = P_n(x)$ est lisse.
4. Chercher les symétries de $\mathcal{C}$.
5. Calculer la tangente aux points d'ordonnées nulles.
6. Trouver les points dont la tangente est verticale.
7. Chercher grossièrement (i.e. trouver un encadrement des abscisses) des points dont la tangente est horizontale.
8. Tracer grossièrement $\mathcal{C}$. On étudiera les intersections de $\mathcal{C}$ avec les droites horizontales et verticales.

Exercice 5

Soient F, F' deux points du plan et $\lambda > 0$. On considère les ensembles :

$$\mathcal{E}_\lambda = \{M \in \mathbb{R}^2 \,|\, MF + MF' = \lambda\} \qquad \mathcal{H}_\lambda = \{M \in \mathbb{R}^2 \,|\, |MF - MF'| = \lambda\}$$

On admet que $\mathcal{E}_\lambda, \mathcal{H}_\lambda$ sont des coniques.

1. Déterminer leurs natures et leurs axes de symétrie.
2. On note $E : M \mapsto MF + MF'$. Montrer que :
$$\nabla E_M = \frac{\overrightarrow{FM}}{FM} + \frac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}$$
3. En déduire que si M est un point sur $\mathcal{E}_\lambda$ alors la première bissectrice[1] de l'angle $\widehat{FMF'}$ est orthogonale à la tangente à $\mathcal{E}_\lambda$ en M.
4. On note $H : M \mapsto MF - MF'$. Montrer que :
$$\nabla H_M = \frac{\overrightarrow{FM}}{FM} - \frac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}$$
5. En déduire que si M est un point sur $\mathcal{H}_\lambda$ alors la première bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$ est la tangente à $\mathcal{H}_\lambda$ en M.

Exercice 6

Soient $a \geqslant b > 0$, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de l'équation :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

On note $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$, où c est l'unique réel > 0 tel que $a^2 = b^2 + c^2$.

1. La bissectrice qui intersecte le segment $[FF']$

1. On notant M le point (x, y). Montrer que $MF = a - c\cos t$ et $MF' = a + c\cos t$.
2. En déduire que $\mathcal{E}$ est incluse dans l'ensemble des solutions de l'équation du jardinier :

$$MF + MF' = 2a \qquad (\bigstar)$$

3. Réciproquement, montrer que toute solution de l'équation $(\bigstar)$ est sur l'ellipse $\mathcal{E}$. *On pourra commencer par montrer que l'équation $(\bigstar)$ est équivalente à l'équation suivante :*

$$(MF^2 + MF'^2 - 4a^2)^2 - 4MF^2MF'^2 = 0$$

Ensuite, on calculera en coordonnées.

Exercice 7

Soit $b > 0$. On cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_b$ des points $M = (x, y)$ du plan tels que :

$$\text{dist}(M, -1) \cdot \text{dist}(M, 1) = b$$

1. Ramener ce problème à la résolution d'une équation implicite de la forme $F(x, y) = b$.
2. Examiner les symétries du problème.
3. Montrer qu'en dehors de l'origine le gradient de F est non nul.
4. En déduire que les courbes $\mathcal{C}_b$ sont lisses sauf à priori $\mathcal{C}_1$ en l'origine.
5. On fixe une direction θ. Montrer que si on suppose que $M = \rho e^{i\theta}$ alors ρ est solution de l'équation :

$$\rho^4 + 2\cos(2\theta)\rho^2 + 1 - b^2 = 0$$

6. En déduire que $\mathcal{C}_1$ est une courbe que l'on a déjà croisé. En particulier, montrer qu'elle n'est pas lisse en l'origine.
7. Montrer que toutes ses courbes sont bornées.
8. Montrer que si $b > 1$ alors $\mathcal{C}_b$ est une courbe fermée simple.
9. Montrer que si $0 < b < 1$ alors $\mathcal{C}_b$ est l'union de deux courbes fermées simples.