Courbes et Surfaces Paramétrées

Examen 2ème Session, 19 juin 2018,
8h - 10h, Durée : 2 heures

L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdits. La clarté, le soin et la concision font partie de la notation.

Questions de Cours

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée par l'abscisse curviligne.
   (a) Donner la définition de la courbure de γ au point de paramètre $s \in I$.
   (b) Si note $\alpha : I \to \mathbb{R}$ un relevé de l'angle $(Ox, \gamma'(s))$, qu'elle est la signification géométrique de $\alpha'(s)$?
2. Donner à l'aide de formules, 4 exemples de courbes $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telles que $f_i(0) = (0, 0)$, f_i est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et les positions des $f_1, \cdots, f_4$ par rapport à leurs tangentes en 0 sont de natures différentes. On dessinera ces 4 courbes.
3. Donner un exemple de courbe de l'espace de courbure et torsion constante.
4. Montrer qu'une courbe plane de courbure constante est un cercle.

Exercice 1

On considère la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée du plan par $f : t \mapsto f(t) = (x(t), y(t))$ où :

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

1. Trouver l'axe de symétrie de la courbe. En déduire un intervalle d'étude J de f.
2. Dresser les tableaux de variation de x et y.
3. Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.
4. Tracer les tangentes importantes et les asymptotes de $\mathcal{C}$.
5. Tracer $\mathcal{C}$.

Exercice 2

On considère la courbe $\mathcal{C}_2$ donnée en coordonnées polaires par :

$$\rho(\theta) = 1 + \cos\theta = 2\cos^2(\theta/2), \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

1. Étudier et Tracer $\mathcal{C}_2$

   On note $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $f : \theta \mapsto \rho(\theta)u_\theta$.
2. Calculer la norme de $f'(\theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
3. Calculer la longueur de $\mathcal{C}_2$.

   On note T_θ, le vecteur tangent unitaire à $\mathcal{C}_2$ au point de paramètre θ.
4. Pour $0 \leqslant \theta < \pi$, Montrer qu'une mesure de l'angle $V = (u_\theta, T_\theta)$ est $\frac{\theta+\pi}{2}$.
5. En déduire une mesure de l'angle $\beta = (u_0, T_\theta)$.
6. Montrer que le rayon de courbure de $\mathcal{C}_2$ au point de paramètre θ est $\frac{4}{3}\cos(\theta/2)$.

Exercice 3

Soient $a, b > 0$. On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C}_3$ donnée par :
$\gamma : \mathbb{R} \ni t \mapsto (a\cos t, b\sin t) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer le vecteur tangent unitaire T, le vecteur normal N, la courbure κ et le rayon de courbure R au point de paramètre t de la courbe $\mathcal{C}_3$. *On pourra commencer par rappeler les formules permettant de calculer ses quantitées pour une courbe paramétrée quelconque.*
2. On note $\delta : t \mapsto \gamma(t) + R(t)N(t)$. Rappeler le nom et l'interprétation de δ.
3. On note $\delta(t) = (X(t), Y(t))$. Montrer que :

$$X(t) = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t \qquad Y(t) = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t$$

4. Étudier la périodicité de δ et ses symétries.
5. Tracer pour $a = 2$ et $b = 1$, les courbes données par γ et δ.