**Courbes et Surfaces Paramétrées**

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

*Examen du 9 mai 2018*
*8h - 10h*
*Durée : 2 heures*

*L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdits. La clarté, le soin et la concision font partie de l'évaluation.*

## Questions de Cours

1. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée par l'abscisse curviligne.
   (a) Donner la définition de la courbure de $\gamma$ au point de paramètre $s \in I$.
   (b) Si note $\alpha : I \to \mathbb{R}$ un relevé de l'angle $(Ox, \gamma'(s))$, qu'elle est la signification géométrique de $\alpha'(s)$ ?
2. Calculer la courbure d'une courbe donnée en coordonnées polaires par une fonction $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ en un point de paramètre $\theta_0$ tel que $\rho(\theta_0) = 0$ et $\rho'(\theta_0) \neq 0$.
3. Calculer la longueur de la cardioïde, c'est à dire de la courbe donnée en coordonnées polaires par la fonction $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$.

## Exercice 1

On considère la courbe $\mathcal{C}$ donnée en coordonnées polaires par :

$$\rho(\theta) = 1 + \sqrt{2}\cos\theta$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une courbe périodique.
2. Trouver l'axe de symétrie de la courbe. En déduire un intervalle d'étude $J$ de $\rho$.
3. Dresser le tableau de variation de $\rho$ sur $J$.
4. Tracer les tangentes importantes à $\mathcal{C}$, en justifiant leurs positions.
5. Tracer $\mathcal{C}$ sur $J$ d'une couleur, puis compléter le tracé avec une autre couleur.

## Exercice 2

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $F(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$. On note $\mathcal{C}_2$ la courbe implicite du plan donnée par $\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$.

1. Étudier les symétries de $\mathcal{C}_2$.
2. Montrer qu'en dehors d'un point $m_0 \in \mathcal{C}_2$ que l'on identifiera la courbe $\mathcal{C}_2$ est lisse.
3. Chercher les points de $\mathcal{C}_2$ qui possèdent une tangente verticale.
4. Chercher les points de $\mathcal{C}_2$ qui possèdent une tangente horizontale.
5. Montrer que $\mathcal{C}_2$ est bornée.
6. On note $Q$ le premier quart de plan fermé, c'est à dire $Q = [0, +\infty[\times[0, +\infty[$. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_2 \cap Q$ est le graphe d'une fonction $g : x \mapsto g(x)$ que l'on calculera explicitement.
7. Étudier les variations de $g$.
8. Calculer les tangentes à $\mathcal{C}_2$ en $m_0$.
9. Tracer les tangentes importantes à $\mathcal{C}_2$ puis tracer $\mathcal{C}_2$.

## Exercice 3

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ un arc birégulier paramétré par l'abscisse curviligne de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note $T : s \mapsto T(s)$, $N : s \mapsto N(s)$ et $B : s \mapsto B(s)$, la tangente unitaire, la normale, et la binormale à $s \mapsto \gamma(s)$ au point de paramètre $s$. On note $K : s \mapsto K(s)$ et $\tau : s \mapsto \tau(s)$ la courbure et la torsion de $\gamma$ au point de paramètre $s$. *On suppose tout au long du problème que la torsion $\tau$ ne s'annulle pas sur $I$.* On note $R : s \mapsto R(s) = 1/K(s)$ et $\sigma : s \mapsto \sigma(s) = 1/\tau(s)$.

On note $\mathbb{S}^2$ la sphère unitée de $\mathbb{R}^3$, c'est à dire :

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

1. *On suppose tout au long du 1.) que $\gamma$ est sur la sphère $\mathbb{S}^2$, c'est à dire que : $\forall s \in I$, $\gamma(s) \in \mathbb{S}^2$.*
   (a) Montrer que $(\gamma|T) = 0$.
   (b) En déduire qu'ils existent deux fonctions $a, b : I \to \mathbb{R}$ telles que :
   $$\gamma = aN + bB \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = 1$$
   (c) Rappeler les formules de Frenet, exprimant les dérivées de $T, N$ et $B$ en fonction de $T, N, B$ et de $K, \tau$.
   (d) Calculer $a$ et $b$, en fonction de $R$ et $\sigma$.
   (e) En déduire que $R$ et $\sigma$ vérifient l'équation différentielle :
   $$R^2 + (R'\sigma)^2 = 1$$
2. *On suppose à présent et tout au long du 2.) la fonction $R'$ ne s'annule pas et que l'équation différentielle suivante est vérifiée :*
   $$R^2 + (R'\sigma)^2 = 1$$
   (a) En vous inspirant du 1., montrer qu'ils existent deux fonctions $a, b : I \to \mathbb{R}$ telles que l'arc suivant soit de dérivée nulle
   $$\gamma - aN - bB$$
   (b) Vérifier que la fonction $a^2 + b^2$ est constante.
   (c) En déduire que $\gamma$ est sur une sphère.