Probabilités et Statistiques pour l'INgénieur

TD 4

1 Loi d'un couple et lois marginales

Exo 1:

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles, dont la loi a pour densité $yx^{y-1}e^{-y}1_{[0,1]}(x)1_{[0,+\infty)}(y)$.

- Dessinez le support de la loi de (X,Y).
- Calculez la loi de Y.
- Calculez $\mathbb{E}(X(Y+1))$.

....

Exo 2:

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles, dont la loi a pour densité $ke^{-y}1_{0<x<y}$, où k est un réel.

- Dessinez le support de la loi de (X,Y).
- Calculez k.
- Calculez les densités marginales de (X,Y).
- Déterminez la loi de $T := Y - X$.

....

Exo 3:

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles, dont la loi a pour densité $\pi^{-1}1_{x^2+y^2\leqslant 1}$.

- Pour tout réel λ, calculez graphiquement $\mathbb{P}(X > \lambda Y)$.
- Calculez graphiquement $\mathbb{P}(X > 1/\sqrt{2})$.

....

Exo 4:

Soit $\lambda > 0$. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles, dont la loi a pour densité :
$(x,y) \mapsto \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}1_{[0,+\infty)}(x)1_{[0,+\infty)}(y)$.

- Que peut-on dire des variables aléatoires X et Y ?
- Calculez la loi du couple $(X+Y, X-Y)$.

....

2 Indépendance

Exo 5:

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme dans $[0,1]$. Quelle est la loi du couple de variables aléatoires $(\min\{X,Y\}, \max\{X,Y\})$?

....

Exo 6:

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, et qui suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre $p \in (0,1)$. On pose :

$$\begin{aligned} S &:= \min\{X,Y\}, \\ T &:= |X-Y|. \end{aligned}$$

- Calculez la loi du couple (S,T), c'est-à-dire la valeur de $\mathbb{P}((S,T) = (s,t))$ pour tous entiers s et t positifs. Indice : distinguer les cas $t = 0$ et $t > 0$.
- Déduisez-en la loi de S et celle de T. Calculez $\mathbb{E}(T)$.
- Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?

Exo 7:

Soit $n \geqslant 1$. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1. On pose $X^{(1)} := \min_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k$, et $X^{(n)} := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k$.

— Calculez les fonctions de répartition de $X^{(1)}$ et $X^{(n)}$ en fonction de F.

— Si la loi des X_k a une densité f, exprimez les densités de $X^{(1)}$ et $X^{(n)}$ en fonction de f.

— Faites les calculs quand les X_k suivent une loi uniforme sur $[0,1]$,

— et quand elles suivent une loi exponentielle de paramètre α. Que remarquez vous pour $X^{(1)}$?

Exo 8:

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent toutes deux une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Montrez que $\frac{X}{Y}$ suit une loi de Cauchy.

Exo 9:

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent une loi exponentielle de paramètres respectifs α et β. On pose $S := \min\{X, Y\}$ et $T := |X - Y|$.

— Calculez la loi du couple (S, T).

— Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?

Exo 10:

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes chacune de loi normale de paramètres $(0,1)$. Montrez que les variables aléatoires $(X+Y)/\sqrt{2}$ et $(X-Y)/\sqrt{2}$ sont indépendantes, et suivent chacune une loi normale de paramètres $(0,1)$.

Exo 11:

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Dans les trois cas suivants, décrivez la loi du couple (X, Y) :

— X suit une loi géométrique de paramètre p, et Y suit une loi binomiale de paramètres (n, q) ;

— X suit une loi de Poisson de paramètre λ, et Y suit une loi exponentielle de paramètre μ ;

— X et Y suivent une loi normale de paramètres $(0,1)$ et $(1,1)$ respectivement.

3 Calcul de $\mathbb{P}(X = Y)$

Exo 12:

Soient X et Y deux variables aléatoires rélles indépendantes. On suppose que la loi de X est à densité.

— Montrez que, pour tout réel a, on a $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

— Déduisez-en, en utilisant le théorème de Tonelli, que $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

— Si X et Y ont la même loi, que peut-on dire de $\mathbb{P}(X > Y)$?

Exo 13:

Deux personnes se sont données rendez-vous entre 14h et 15h. Ne se souvenant plus de l'heure précise, chacune décide d'arriver à un moment au hasard uniforme entre 14h et 15h. Les deux décisions sont indépendantes. Quelle est la probabilité que la personne arrivant le plus tôt ait à attendre moins d'un quart d'heure ?