Probabilités et Statistiques pour l'INgénieur

TD 3

Les lemmes de Borel-Cantelli

Exo 1: *Premier Lemme de Borel-Cantelli.*

Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements telle que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$, c'est à dire presque sûrement, seuls un nombre fini d'évènements A_n sont réalisés.

....

Exo 2: *Second Lemme de Borel-Cantelli*

Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements **indépendants** telle que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$

On va montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$, c'est à dire presque sûrement, une infinité d'évènements A_n sont réalisés.

1. Vérifier que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$ est équivalent à $\mathbb{P}(\liminf A_n^c) = 0$.
2. En utilisant l'inégalité $1 - x \leqslant e^{-x}$ (valide sur $\mathbb{R}$ tout entier), montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{q\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{q} A_k^c\right) = 0$$

3. Montrer le second lemme de Borel-Cantelli.
4. Essayer de faire une phrase en français qui résume les deux lemmes de Borel-Cantelli.

....

Variable aléatoire à densité sans mémoire

On dit qu'une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}_+$ est *sans mémoire* lorsque :

$$\forall s, t > 0, \qquad \mathbb{P}(X > s + t \,|\, X > t) = \mathbb{P}(X > s)$$

Exo 3:

Montrer que la loi exponentielle est sans mémoire (quelque soit le paramètre).

....

Exo 4:

Soit X une variable aléatoire sans mémoire. Supposons X à densité et notons f sa densité. On définit la fonction suivante $\hat{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par la formule : $\hat{F}(t) = \mathbb{P}(X > t)$.

1. Montrer que pour tout $s, t > 0$, on a $\hat{F}(s + t) = \hat{F}(s) \cdot \hat{F}(t)$.
2. On pose $\lambda = \hat{F}(1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\hat{F}(n) = \lambda^n$.
3. De même montrer que $\hat{F}(x) = \lambda^x$, si $x \in \mathbb{Q}_*^+$.
4. En déduire que X suit une loi usuelle que l'on explicitera.

....

Fonction caractéristique

Exo 5:

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire e^{izX} est intégrable.

2. On appelle *fonction caractéristique de X*, la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $z \to \mathbb{E}(e^{izX})$. Calculer la fonction caractéristique des variables aléatoires suivantes, puis, quand c'est possible, dériver-la en 0 pour calculer l'espérance et la variance de X, quand la loi de X est :
   (a) uniforme sur $\{1, \cdots, N\}$;
   (b) géométrique de paramètre p ;
   (c) de Poisson de paramètre λ ;
   (d) uniforme sur $[0,1]$;
   (e) exponentielle de paramètre λ ;
   (f) de Laplace de paramètre λ ;
   (g) de Cauchy standard.

....

Inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Exo 6:

Le nombre hebdomaire de ventes de voitures pour un certain concessionnaire est une variable aléatoire X d'espérance $\mathbb{E}(X) = 16$ et variance $\mathrm{Var}(X) = 9$. Donner une borne inférieure à la probabilité que les ventes de la semaine prochaine se situent entre 10 et 22, bornes incluses.

....

Exo 7:

Soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre (n, p). Montrer que :

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$

....

Application des lemmes de Borel-Cantelli

Exo 8: *Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$*

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{i\geqslant 1}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ tel que $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, avec $0 < p < 1$. On note $S_n = X_1 + ... + X_n$. On considère les événements suivants : $A_n = \{S_n = 0\}$ et $A_\infty = \limsup A_n$.
On a modélisé la situation suivante : S_n est la position au temps n d'un individu qui part de 0 et avance ou recule d'un pas avec proba p et $1-p$. L'événement A_n correspond à l'individu est revenu au temps n au point de départ. L'événément A_∞ correspond à l'individu revient une infinité de fois au point de départ.

1. Calculer explicitement $\mathbb{P}(A_n)$.
2. En utilisant la formule de Stirling ($n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$), montrer que :

$$\mathbb{P}(A_{2k}) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}\big(4p(1-p)\big)^k$$

3. En déduire que si $p \neq \frac{1}{2}$ alors $\mathbb{P}(A_\infty) = 0$.

   A présent, on veut montrer que si $p = \frac{1}{2}$ alors $\mathbb{P}(A_\infty) = 1$.
4. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le second lemme de Borel Cantelli ?

5 ⋆ ⋆ En utilisant le fait que :

$$\begin{aligned} A_\infty^c &= \bigsqcup_{t\geqslant 0} \{S_t = 0\} \cap \{\forall i \geqslant 1, S_{t+i} \neq 0\} \\ &= \bigsqcup_{t\geqslant 0} \{S_t = 0\} \cap \{\forall i \geqslant 1, X_{t+1} + X_{t+2} + \cdots + X_{t+i} \neq 0\} \end{aligned}$$

Montrer que $\mathbb{P}(A_\infty) = 1$. (Dans l'égalité d'événements t est le dernier temps en zéro).

....

Intégrale de fonctions à plusieurs variables

Exo 9:

On note λ_2 la mesure de Lebesgue sur le plan. Calculez, dans les trois cas suivant, l'intégrale double $\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$:

1. $D = [1,2] \times [0,3]$ et $f(x,y) = xy + y^2 - 1$.
2. $D = [1,2] \times [0,2]$ et $f(x,y) = ye^{xy}$.
3. $D = \{(x,y) \in [0,1]^2 \ : \ x > y\}$ et $f(x,y) = (x-2y)^2$.

....

Une formule alternative pour l'espérance

Exo 10:

Dans ce qui suit, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire à valeurs réelles.

1. Soit $p \in [1,\infty)$. Supposons que $X \in \mathbb{L}^p$. Trouvez une constante C telle que $\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leq Ct^{-p}$ pour tout $t > 0$.
2. Pour tout $(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, on pose $f(\omega,t) = 1$ si $|X|(\omega) \geqslant t$, et 0 sinon. En intégrant la fonction f sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ de deux manières différentes (théorème de Fubini), montrez que :

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t.$$

3. On cherche à généraliser cette identité. Montrez que, pour tout $p \in [1,\infty)$,

$$\mathbb{E}(|X|^p) = \int_0^{+\infty} pt^{p-1}\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t.$$

4. Déduisez-en que s'il existe des constantes $C, \varepsilon > 0$ telle que $\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leq Ct^{-p-\varepsilon}$ pour tout $t > 0$, alors $X \in \mathbb{L}^p$.

....