Licence 3 — Math-Ingé 2016–2017

Probabilités et Statistiques pour l'INgénieur

Examen Terminal
Mardi 9 Mai

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifier toutes vos réponses, ***les réponses du type OUI/NON sans justification seront considérées comme fausses.***

Durée : 2 heures

Question de cours:

1. Rappeler la définition de l'indépendance d'une famille $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires.
2. Donner la définition de la convergence en loi.
3. Rappeler l'énoncé de la loi faible ou forte des grands nombres.
4. Rappeler l'énoncé du théorème central limite.
5. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y une loi de Poisson de paramètre μ. Quelle est la loi de $X+Y$?
6. Le démontrer.

Exercice 1:

Soit $U = (X, Y)$ un couple de variable aléatoire à densité, de densité la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par : $f(x, y) = \lambda e^{-y}\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)$.

1. Vérifier que f est un bien une densité de probabilité si le réel λ est bien choisi, (on donnera la valeur de λ).
2. Donner et dessiner le support du couple (X, Y).
3. Calculer les lois marginales du couple (X, Y). Si elles suivent des lois usuelles, donner leurs noms et leurs paramètres
4. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?
5. Calculer la loi de la variable aléatoire $A = \ln(X)$.
6. Calculer la loi de la variable aléatoire $B = e^Y$.
7. Calculer la loi de la variable aléatoire $M = \max(X, Y)$.
8. Calculer la loi de la variable aléatoire $\Sigma = X + Y$.

Exercice 2:

Soit $V = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires à densité, de densité la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante $g(x, y) = \frac{\mu}{2x}\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, \mathbb{1}_{[0,2x]}(y)$.

1. Vérifier que g est bien une densité de probabilité si le réel μ est bien choisi. (on donnera la valeur de μ).
2. Donner et dessiner le support du couple (X, Y).
3. Calculer les lois marginales du couple (X, Y). Si elles suivent des lois usuelles, donner leurs noms et leurs paramètres.
4. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
5. Calculer la loi de $X + Y$.

Exercice 3:

Tous les jours, Rémi fait le trajet entre son domicile et son travail. Un jour sur deux, il dépasse la vitesse autorisée. Un jour sur dix, un contrôle radar est effectué. On suppose que ces deux événements (dépassement de la vitesse limite et contrôle radar) sont indépendants, et que leur survenue un jour donné ne dépend pas de ce qui se passe les autres jours. Si le radar enregistre son excès de vitesse, Rémi perd un point sur son permis de conduire. On note X_i le nombre de point perdu le jour i.

1. Montrer que les X_i suivent une loi de Bernoulli de paramètre r que l'on calculera à l'aide des données du problème.
2. On note $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$. Que représente S_n ?
3. Quelle est la loi de S_n ? Son espérance ? Sa variance ?

   En tant que jeune conducteur, Rémi ne dispose que de 6 points sur son permis. On note T le nombre de jours de validité de son permis dans le cas où celui-ci lui est retiré. Sinon, on pose $T = \infty$.
4. Soit $n \geqslant 6$, montrer que :
$$\mathbb{P}(T = n) = C_{n-1}^{5}\, r^6 (1-r)^{n-6}$$
5. En déduire que $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$ en admettant la formule ($\star$) valide pour tout $|x| < 1$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{n \geqslant p} n(n-1)\cdots(n-p+1)\, x^{n-p} \quad = \quad \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} \qquad (\star)$$
6. Interpréter le résultat $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$.
7. Calculer l'espérance de T ?

Bonus Montrer la formule ($\star$).

Exercice 4:

Soit N un entier. On considère $X_1, ..., X_N$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi (à densité) uniforme sur l'intervalle $[0, N]$. On note $M_N = \min(X_1, ..., X_N)$.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{P}(M_N > t)$.
2. En déduire la fonction de répartition F_{M_N} de M_N. La dessiner.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, calculer $\lim_{N \to \infty} F_{M_N}(t)$.
4. Donner un sens exact à la phrase « Pour N très grand, M_N est distribué selon une loi exponentielle de paramètre 1 ».