Licence 3 — Math-Ingé — Math-Éco 2016–2017

**Probabilités et Statistiques pour l'INgénieur**

*Examen Terminal*
$2^{ème}$ *Session*
*19 Juin, 8h-10h*

---

*Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifier toutes vos réponses,* ***les réponses du type OUI/NON sans justification seront considérées comme fausses.***

Durée : 2 heures

---

## Question de cours:

4.0 pts

1. Donner la définition de la convergence presque sûr. 1 pt
2. Rappeler l'inégalité de Markov. 1 pt
3. Énoncer la loi forte des grands nombres. 1 pt
4. Énoncer le théorème central limite. 1 pt

## Exercice 1:

5.0 pts

Soit $(X,Y)$ un couple de variables aléatoires à densité, de densité la fonction $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante :

$$f(x,y) = \frac{\lambda e^{-x}}{x} \mathbb{1}_{[0,x]}(y)\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

1. Vérifier que $f$ est bien une densité de probabilité si le réel $\lambda$ est bien choisi. 1 pt
2. Donner la valeur de $\lambda$. 1 pt
3. Donner et dessiner le support du couple $(X,Y)$. 1 pt
4. Calculer la loi marginale de $X$. L'identifier si c'est possible. 1 pt
5. Les variables $X$ et $Y$ sont elles indépendantes ? 1 pt

## Exercice 2:

4.0 pts

Soit $U$ une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$. On pose $N = \lfloor U \rfloor + 1$ la partie entière de $U$.

*On rappelle que si x est un réel alors la partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égale à x, on la note* $\lfloor x \rfloor$*, autrement dit :*

$$\lfloor x \rfloor = max\,\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$$

1. Quelle est la loi de $N$ ? 1 pt
2. On pose $Z = N - U$. Quel est le support de la loi de $Z$ ? 1 pt
3. Calculer la fonction de répartition de $Z$. 1 pt
4. En déduire que $Z$ est une variable aléatoire à densité et calculer la densité de $Z$. 1 pt

## Exercice 3:

4.0 pts

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent une loi exponentielle de paramètres respectifs $\alpha$ et $\beta$. On pose $S := \min\{X,Y\}$ et $T := |X - Y|$.

1. Calculer la loi du couple $(S,T)$. 2 pt

2. Calculer la loi de $S$ et la loi de $T$, les identifier si c'est possible. (*On peut faire la question 2 sans avoir réussi la question 1.)* 1 pt
3. Les variables aléatoires $S$ et $T$ sont-elles indépendantes ? 1 pt

### Exercice 4: 5.0 pts

La compagnie aérienne Pa2mOral vend les places sur le vol Paris-Tunis d'un appareil de 400 passagers. Soit $X_i$ la variable aléatoire qui décrit la situation du passager $i$, on pose $X_i = 1$ si le passager en question se présente à l'embarquement et $X_i = 0$ si le passager ne se présente pas. La probabilité qu'un passager ayant réservé pour ce vol se présente à l'embarquement est noté $p$ et on suppose les $X_i$ indépendants.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $X_i$ ? 1 pt
2. Calculer l'espérance et la variance de $X_i$. 1 pt
3. Rappeler l'énoncé du théorème central limite dans le cas des Bernoulli. 1 pt
4. La compagnie Pa2mOral vend $N \geqslant 400$ places. Justifier la phrase suivante :
   la probabilité que la compagnie soit en situation de surbooking est inférieure à 0.01 tant que $N$ vérifie l'inégalité suivante :
   $$DTF_{p,N} := \frac{400 - pN}{\sqrt{p(1-p)N}} \geqslant 2,45$$
   On pourra utiliser librement le résultat suivant : Si $G$ est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite alors : 1 pt
   $$\mathbb{P}(G \leqslant 2,45) = 0.9929$$
5. Dans le tableau 1, les valeurs de $p = 0.84, \ldots, 0.96$ sont données à la première ligne, les valeurs de $N = 400, \ldots, 500$ sont dans la première colonne. Les autres valeurs sont les valeurs correspondantes de $DTF_{p,N}$. Interpréter le résultat du point de vue de la compagnie Pa2mOral, en exhibant des couples $(N, p)$ qui permettent de gagner de l'argent avec peu de risques. 1 pt

| N \ p | 0,84 | 0,86 | 0,88 | 0,9 | 0,92 | 0,94 | 0,96 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 400 | 8,729 | 8,069 | 7,385 | 6,667 | 5,898 | 5,053 | 4,082 |
| 410 | 7,49 | 6,746 | 5,957 | 5,103 | 4,151 | 3,036 | 1,613 |
| 420 | 6,282 | 5,456 | 4,565 | 3,578 | 2,446 | 1,068 | -0,797 |
| 430 | 5,104 | 4,197 | 3,205 | 2,09 | 0,782 | -0,853 | -3,15 |
| 440 | 3,953 | 2,968 | 1,878 | 0,636 | -0,843 | -2,73 | -5,449 |
| 450 | 2,829 | 1,766 | 0,58 | -0,786 | -2,433 | -4,565 | -7,698 |
| 460 | 1,73 | 0,591 | -0,689 | -2,176 | -3,987 | -6,361 | -9,898 |
| 470 | 0,654 | -0,558 | -1,93 | -3,536 | -5,509 | -8,119 | -12,052 |
| 480 | -0,398 | -1,684 | -3,146 | -4,869 | -6,999 | -9,84 | -14,162 |
| 490 | -1,429 | -2,786 | -4,337 | -6,174 | -8,459 | -11,527 | -16,23 |
| 500 | -2,44 | -3,867 | -5,505 | -7,454 | -9,891 | -13,182 | -18,257 |

TABLE 1 – Le tableau de l'exo 4

Total s
22.0 pts