

**Probabilités et Statistiques pour l'INGénieur**

Contrôle Continu n°3

Vendredi 31 Mars

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifier toutes vos réponses, les réponses du type OUI/NON sans justification seront considérées comme fausses.

Durée : 1 heure et 30 minutes

Questions de cours:

1. Rappeler la définition de l'indépendance d'une famille $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires.
2. Rappeler l'inégalité de Markov.
3. Rappeler (précisément) l'énoncé de la loi faible ou forte des grands nombres.
4. Rappeler (précisément) l'énoncé du théorème central limite.
5. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y une loi de Poisson de paramètre μ . Quelle est la loi de $X + Y$?
6. Le démontrer.

Exercice 1:

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de densité $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par la formule :

$$f(x) = \lambda \cos(x) \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x).$$

1. Montrer qu'il existe un réel λ tel que f soit la densité d'une probabilité sur \mathbb{R} . Le calculer.
2. Dessiner f .
3. Quel est le support de la loi de X ? Le dessiner.
4. Quelle est la probabilité que $X = \frac{1}{3}$?
5. Quelle est la probabilité que $X \in]0, \frac{\pi}{4}]$?
6. Calculer l'espérance X .

Exercice 2:

On note Δ le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 définie par :

$$\Delta = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x \leq y\}$$

Soit $U = (X, Y)$ un couple à densité de densité $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = 2 \cdot \mathbb{1}_{\Delta}(x, y)$.

1. Quel est le support de la loi du couple (X, Y) ? Le dessiner.
2. Calculer les lois marginales du couple (X, Y) .
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
4. Calculer l'espérance de X , de Y et XY .
5. Quelle est la loi de Y^2 ? la loi de Y^k pour k un entier quelconque supérieur à 1?
6. Quelle est la loi de $M = \max(X, Y)$?
7. Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 3:

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X \leq Y)$ lorsque les variables aléatoires X et Y suivent :

1. la loi uniforme sur $\{0, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$.
2. des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2 .
3. la loi uniforme sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.