Licence 3 — Math-Ingé & Math-Éco 2016–2017

Probabilités et Statistiques pour l'INgénieur

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Contrôle Continu n°2
Mercredi 22 Mars

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifier toutes vos réponses, ***les réponses du type OUI/NON sans justification seront considérées comme fausses.***

Durée : 1 heure

Question de cours:

1. Rappeler la définition de l'indépendance d'une famille $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires.
2. Rappeler la définition de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X.
3. Rappeler (précisément) l'énoncé de la loi faible ou forte des grands nombres.
4. Rappeler (précisément) l'énoncé du théorème central limite.

Exercice 1:

On note $\mathscr{D}$ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $\mathscr{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leqslant 1\}$.
Soit $U = (X,Y) : (\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}) \to \mathbb{R}^2$ un vecteur aléatoire, on suppose que la loi du couple (X,Y) est à densité, de densité la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\mathbb{1}_{\mathscr{D}}(x,y)$.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Quel est le support de la loi de $U = (X,Y)$? Le dessiner.
3. Calculer les densités marginales f_X et f_Y de $U = (X,Y)$.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2:

Soit $\lambda > 0$. On considère la fonction : $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x,y) = \lambda e^{-|x|-y}\,\mathbb{1}_{[0,+\infty]}(y)$.

1. Montrer qu'il existe un réel λ tel que g soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$. Ce réel est-il unique ? Calculer sa valeur.

On fixe à partir de maintenant λ à la valeur calculée dans la question précédente. On se donne un couple $V = (X,Y) : (\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}) \to \mathbb{R}^2$ de variables aléatoires de densité g.

2. Quel est le support de la loi de $V = (X,Y)$? Le dessiner.
3. Quelle est la loi de X ? de Y ? Si X ou Y suit une loi usuelle, on donnera le nom et le paramètre de cette loi usuelle.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer l'espérance de X, de Y et de XY.
6. On pose $T = Y - X$. Montrer que la densité g_T de T est donnée par la formule :

$$g_T(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x,x+t)\,dx$$

7. En déduire une formule explicite pour g_T.

Exercice 3:

Soit $\alpha > 0$. Soit $X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X suit une *loi de Pareto de paramètre* α lorsqu'on a :

$$\forall t \geqslant 1, \qquad \mathbb{P}(X > t) = \frac{1}{t^\alpha}$$

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Pareto de paramètre α.

1. Montrer que le support de X est inclus dans $[1, +\infty[$.
2. Calculer la densité $h_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de X ? En déduire que le support de X est exactement $[1, +\infty[$.
3. Pour quelles valeurs de α, la variable aléatoire X est-elle d'espérance finie ?
4. Calculer l'espérance de X pour toutes les valeurs de $\alpha > 0$ où elle est définie.

   Soit Y une variable aléatoire. On suppose que X et Y sont indépendantes et que Y suit une loi de Pareto de paramètre α. On note $h_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la densité de Y.
5. Soit $t \geqslant 1$. Montrer que :

$$\mathbb{P}(XY > t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\left(X > \frac{t}{y}\right) h_Y(y) dy$$

6. En déduire que :

$$\mathbb{P}(XY > t) = \frac{1 + \alpha \ln(t)}{t^\alpha}$$