Probabilités et Statistiques pour l'INgénieur

Contrôle Continu n°1
Mercredi 15 février

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.
Durée : 1 heure

Question de cours:

1. Rappeler la définition de la loi de géométrique
2. Rappeler la définition de la loi de Cauchy.
3. Rappeler la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.
4. Rappeler la définition d'un atome d'une variable aléatoire X.

Exercice 1:

La marque "mes jolis jouets" fabrique des ours en peluche dans exactement deux usines A et B. On suppose que la probabilité qu'un ours en peluche manufacturé dans l'usine A (respectivement B) soit défectueux est p (respectivement q). On suppose que la probabilité pour un ours en peluche acheté en magasin d'avoir été manufacturé dans l'usine A est r.

1. Mathématiser le problème en définissant proprement des événements.
2. Quelle est la probabilité qu'un ours en peluche acheté en magasin soit défectueux ?
3. Sachant que l'ours en peluche acheté est défectueux, qu'elle est la probabilité qu'il vienne de l'usine A ?

Exercice 2:

Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Quel est le support de X ? l'ensemble des atomes de X ?
2. **Montrer** que l'espérance de X est égale à λ.
3. Supposons que sur l'autoroute Paris-Bordeaux, le nombre Y d'accidents pendant une semaine suit une loi de Poisson. Supposons aussi qu'en moyenne on observe 1 accident par semaine.
4. Quelle est la probabilité d'avoir 4 accidents la semaine prochaine ? D'avoir aucun accident ?
5. D'avoir au plus 5 accidents ? Au moins 3 accidents ?
   (*On attend des réponses sous forme algébrique, i.e* $\frac{\pi^e+7}{50}$ *et pas sous forme décimale* $0.2564\ldots$)

Exercice 3:

Soit $\mu > 0$. Soit Z une variable aléatoire réelle à densité, de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par la formule : $f(x) = \mu e^{-|x|}$.

1. Pour quelle valeur de μ, la fonction f est-elle une densité ?

   On suppose à présent que μ est égale à cette valeur.
2. Quel est le support de la loi de Z ?
3. Calculer la fonction de répartition de Z.
4. La variable aléatoire Z est-elle intégrable ? Si oui calculer son espérance.
5. Quelle est la probabilité que $Z = \frac{1}{2}$?
6. Quelle est la probabilité que $Z \in]-1,2[$?
7. Quelle est la variance de Z ?
8. On pose $U = |Z|$. Quelle est la loi de U ?
9. On pose $V = \lfloor U \rfloor$ la partie entière de U, quelle est la loi de V ?

   On rappelle que si x est un réel alors la partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égale à x, on la note $\lfloor x \rfloor$, autrement dit :

$$\lfloor x \rfloor = max\,\{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant x\}$$