Exo 1:

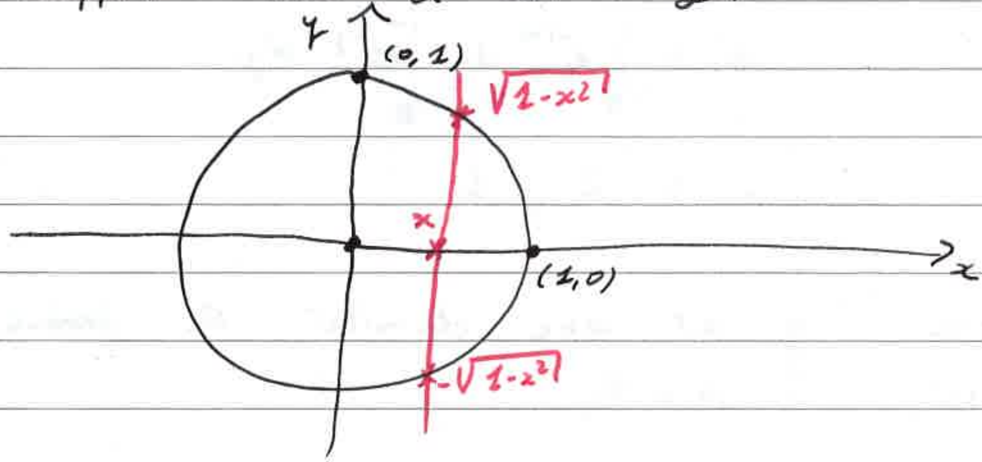
1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \, dx\,dy = \frac{1}{\pi} \text{Aire}(D) = \frac{1}{\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = 1$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

et $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Donc f est bien une densité de proba.

2) Le support de U est D.



3) On note f_X, f_Y les densités marginales de X et Y

$\text{Supp } f_X = \text{supp } f_Y = [-1, 1]$

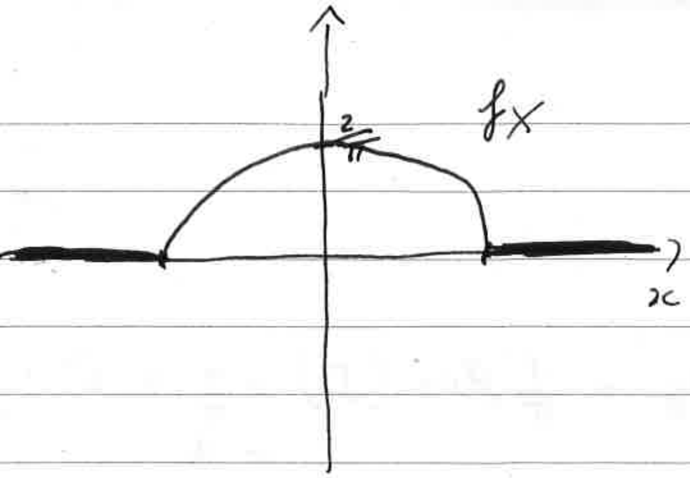
Soit $x \in [-1, 1]$,

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \, dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

dc $f_X(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \, \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$

De même:

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} \, \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$$



4) Non car $f(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)$.

Exo2.

1) $\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-|x|-y}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{+\infty} \lambda e^{-|x|}\, e^{-y}\,dy\right)dx$

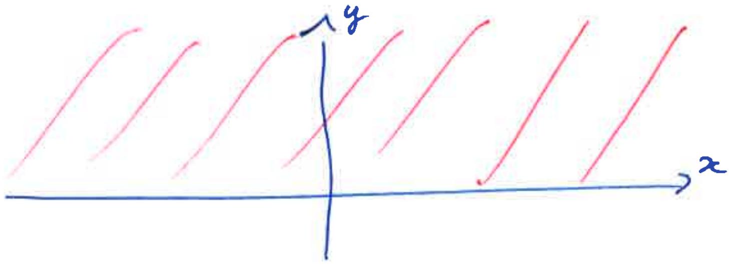
$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-|x|}\,dx \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy}_{=1 \text{ car } = \mathbb{E}(\exp(1))}$$

$$= 2\lambda \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 2\lambda$$

De plus, g est une fct positive sur $\mathbb{R}^2$

Donc g est une densité de proba si $\lambda = 1/2$.

2) $Supp(V) = \mathbb{R} \times [0,+\infty[$



3) $g_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|} e^{-y}\,dy = \frac{1}{2} e^{-|x|} \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

$$g_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} e^{-|x|} e^{-y}\,dx = e^{-y} \cdot \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\,dx = e^{-y} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Don $g_Y(y) = e^{-y}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)$

Donc $Y \sim Exp(1)$

4) Oui, car $g(x,y) = g_X(x)\, g_Y(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$.

5) $\mathbb{E}(Y) = 1$ car $X \sim Exp(1)$

$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{x \frac{1}{2} e^{-|x|}}_{\text{impaire}}\,dx = 0$

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y)$ puisque X et Y sont indépendantes

$= 0 \cdot 1 = 0$

6) Soit f continue bornée.

$$\mathbb{E}(f(T)) = \mathbb{E}(f(Y-X)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(y-x)\, g(x,y)\, dx\, dy$$

On pose $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$

d'où par la formule de chgt de variables (cas affine)

$$dx\,dy = |\det A|\, dx\, dt$$
$$= dx\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(t)\, g(x, x+t)\, dx\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x, x+t)\, dx \right) dt$$

d'où par la méthode des fct muettes, $g_T(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x, x+t)\, dx$

7) $g_T(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} e^{-|x|} e^{-x-t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x+t) \, dx$

Rq : $x+t \geq 0 \iff x \geq -t$

On distingue 2 cas :

A) $t \geq 0$:

$$g_T(t) = \int_{-t}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|-x-t} \, dx$$

$$= \int_{-t}^{0} \frac{1}{2} e^{+x-x-t} \, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x-x-t} \, dx = \int_{-t}^{0} \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{4} e^{-t} = \frac{t}{2} e^{-t} + \frac{1}{4} e^{-t}$$

$$= \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{-t}$$

B) $t \leq 0$

$$g_T(t) = \int_{-t}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x-x-t} \, dx = \left(\frac{t}{2}\right) e^{-t}$$

Exo3.

1) $\mathbb{P}(X > 1) = \frac{1}{1^\alpha} = 1$ donc $\mathbb{P}(X \leq 1) = 0$

Donc $\text{supp}(X) \subset [1, +\infty[$

2) On note F_X la fct de répartition de X, on a :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{t^\alpha} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Or, h_X est la dérivée de F_X puisque F_X est dérivable sur $]1, +\infty[$.

Donc $h_X(t) = \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)$

On remarque que, $\forall t \geq 1$, $h_X(t) > 0$ donc le support de X est exactement $[1, +\infty[$.

3) $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, h_X(x)\, dx = \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\, dx = \alpha \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx < \infty$

ssi $\alpha > 1$

4) $$\mathbb{E}(X) = \alpha \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \alpha \leq 1 \\ \frac{\alpha}{(\alpha-1)} \cdot \left[\frac{-1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^{+\infty} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty \\ \frac{\alpha}{\alpha - 1} \end{cases}$$

X est positive donc $\mathbb{E}(X)$ a toujours un sens

5) $$\mathbb{P}(XY > t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{xy > t\}}(x,y)\, h_X(x)\, h_Y(y)\, dx\, dy$$ par indépendance de X et Y

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{xy > t\}}(x,y)\, h_X(x)\, dx \right) h_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{x > \frac{t}{y}\}}(X)\right) h_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\left(X > \frac{t}{y}\right) h_Y(y)\, dy$$

6) $$\mathbb{P}(XY > t) = \int_1^{+\infty} \mathbb{P}\left(X > \frac{t}{y}\right) h_Y(y)\, dy$$

$$= \int_1^t \underbrace{\mathbb{P}\left(X > \frac{t}{y}\right)}_{\frac{y^\alpha}{t^\alpha}} h_Y(y)\, dy + \int_t^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}\left(X > \frac{t}{y}\right)}_{=1} h_Y(y)\, dy$$

$$= \int_1^t \frac{\cancel{y^\alpha}}{t^\alpha} \cdot \frac{\alpha}{y^{\cancel{\alpha}+1}}\, dy + \int_t^{+\infty} h_Y(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{t^\alpha} \int_1^t \frac{\alpha}{y}\, dy + \mathbb{P}(Y > t)$$

$$= \frac{1}{t^\alpha} \cdot \alpha \ln t + \frac{1}{t^\alpha} = \frac{1}{t^\alpha}\left(1 + \alpha \ln t\right)$$